



دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان نامه

برای دریافت درجه دکتری در رشته‌ی
ریاضی محض، گرایش منطق ریاضی
عنوان

بررسی امکان ساختاری شدن و راسری شدن
برخی اثبات های قضیه ناتمامیت گودل

استاد راهنما

سعید صالحی پور مهر

استاد مشاور

جعفر صادق عیوضلو

پژوهشگر

پیام سراجی

ای جهان دیده بود خویش از تو
بیچ بودی نبوده پیش از تو
در بدایت بدایت همه چیز
در نهایت نهایت همه چیز
ای برارنده سپهر بلند
انجم افروز و انجمن پیوند
آفریننده خزاین جود
مبدع و آفریدگار وجود
هستی و نیست مثل و مانندت
عاقلان جز چنین ندانندت
(هفت پیکر، نظامی گنجوی)

تقدیم بہ:

پدر و مادر م

بناام حضرت حق

همانا زكات علم نشر آن است.

خداوند بزرگ را شكرگزارم كه به اين بنده ناچيز توفيق عطا فرمود تا اندكي از علم لايزال او بهره‌مند گشته و توفيق داشته باشد رساله كوچكي بنويسد كه برخي از زيبايي‌هاي علم رياضيات را نمايان مي‌سازد. ابتدا بايد از زحمات جناب آقاي دكتور سعيد صالحى پور مهر، صميمانه تشكر و قدرداني نموده و از خداوند بزرگ برايشان سلامت و سرافرازي هرچه بيشتر طلب مي‌نمايم. از جناب آقاي دكتور جعفر صادق عيوضلو كه زحمت مشاوره‌ي اين رساله را تقبل فرمودند، كمال سپاس و امتنان را دارم.

در ادامه از زحمات ارزنده‌ي جناب آقاي دكتور اصغر رنجبري و جناب آقاي دكتور هژير حومئي قدرداني مي‌نمايم. و در پايان از تمامي اعضاي خانواده‌ام، دوستان و اساتيد دانشكده علوم رياضي كه در طول دوران تحصيل همواره يار و حامي اينجانب بوده‌اند، تقدير و تشكر مي‌نمايم.

پيام سراجي

۱۳۹۵

نام خانوادگی دانشجو: سراجی

نام: پیام

عنوان: بررسی امکان ساختاری شدن و راسری شدن برخی اثبات های قضیه ناتمامیت گودل

استاد راهنما : سعید صالحی پور مهر

استاد مشاور : جعفر صادق عیوضلو

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی محض گرایش: منطق ریاضی دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۵ تعداد صفحات: ۶۷

کلید واژه‌ها: قضایای ناتمامیت گودل، راسری سازی، ساختاری سازی، پیچیدگی کولموگوروف، پارادکس بری.

چکیده

در این رساله به بررسی دو خاصیت «راسری شدن» و «ساختاری شدن» برای برخی اثبات‌های قضیه اول ناتمامیت می‌پردازیم. منظور از «راسری شدن» این است که اثبات ناتمامیت نظریه فقط با استفاده از شرط سازگاری آن (و نه شرط قوی‌تری مانند ω -سازگاری) باشد و منظور از «ساختاری شدن» این است که الگوریتمی برای محاسبه (یکی از) گزاره‌های تصمیم ناپذیر ارایه شود. ما اثباتی از قضیه اول ناتمامیت ارایه می‌دهیم که بسیار شبیه برهان شایتین است ولی فقط از سازگاری ساده نظریه استفاده می‌کند. ولی در مورد اثبات بولوس نشان می‌دهیم که شرط بهینه برای آن، سازگاری نظریه با جمله سازگاری خودش است. در مورد ساختاری شدن، ثابت می‌کنیم که هیچ یک از دو اثبات بولوس و شایتین ساختاری نیستند. در فصل آخر، تعمیم‌هایی از قضیه اول ناتمامیت برای نظریه‌های تعریف‌پذیر را ارایه می‌کنیم. مقاله‌های مستخرج از این پایان‌نامه به شرح زیر هستند:

1- S. Salehi & P. Seraji, "Gödel-Rosser Incompleteness Theorem, Generalized and Optimized for Definable Theories" (2016), To appear in *Oxford Journal of Logic and Computation*, doi: 10.1093/logcom/exw025.

2- S. Salehi & P. Seraji, “Constructivity and Rosserizibility of the Proofs of Boolos and Chaitin for Gödel’s Incompleteness Theorem” (2016), submitted for publication.

البته مقاله زیر نیز در طول دوره انجام پایان نامه، در مورد موضوعاتی خارج از بحث رساله، آماده و برای چاپ ارسال شده است:

3- P. Seraji & C. Chao, “Generalizing Gödel Second Incompleteness Theorem for Definable Theories” (2016), submitted for publication, arXiv:1602.02416 [math.Lo].

فهرست مطالب

۳	۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی
۳	۱.۱ نظریه‌های حساب
۱۳	۲.۱ نظریه محاسبه‌پذیری
۱۹	۲ بررسی امکان ساختاری شدن اثبات‌های بولوس و شایتین برای قضیه اول ناتمامیت
۱۹	۱.۲ مقدمه
۲۴	۲.۲ عدم امکان ساختاری شدن برهان بولوس
۲۸	۳.۲ عدم امکان ساختاری شدن برهان شایتین
۳۰	۳ بررسی امکان راسری سازی اثبات‌های بولوس و شایتین برای قضیه اول ناتمامیت
۳۰	۱.۳ مقدمه
۳۲	۲.۳ راسری سازی برهان شایتین
۳۴	۳.۳ بررسی امکان راسری سازی برهان بولوس
۳۸	۴ تعمیم قضیه گودل-راسر برای نظریه‌های تعریف‌پذیر
۳۸	۱.۴ مقدمات
۳۹	۲.۴ ملاحظات پیرامون اثبات هایك
۴۱	۳.۴ برخی تلاش‌های اخیر
۴۲	۴.۴ صورت معنایی قضیه ناتمامیت
۴۴	۵.۴ صورت کلی قضیه ناتمامیت گودل
۵۰	۶.۴ بهینه بودن تعمیم
۵۲	۷.۴ غیر ساختاری بودن اثبات‌های با شرط n -سازگاری
۵۴	۸.۴ آخرین نتایج

۵۷	 جمع بندي نتايج	۹.۴
۶۰	مراجع	
۶۳	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۶۵	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ نظریه‌های حساب

نظریه‌هایی که در این رساله بررسی می‌کنیم معمولاً در «زبان حساب»، یعنی زبانی شامل نمادهای $0, s, +, \cdot, <$ ، می‌باشند (= را به عنوان نمادی از منطق در نظر می‌گیریم). در نظریه‌های حساب، ترم $s(s(...s(0)...)n)$ (با n بار)، که نماینده عدد n است را با $\bar{n}$ نشان می‌دهیم. عدد گودل یک فرمول φ را با نماد $\ulcorner \varphi \urcorner$ نشان می‌دهیم. ساده‌ترین نظریه‌ای که برای حساب در نظر می‌گیریم، «حساب رابینسون»^۱ است که آن را با Q نشان می‌دهیم. اصول این نظریه به صورت زیر می‌باشند:

$$1- \forall x : s(x) \neq 0$$

$$2- \forall x, y : s(x) = s(y) \rightarrow x = y$$

$$3- \forall x : x + 0 = x$$

$$4- \forall x, y : x + s(y) = s(x + y)$$

$$5- \forall x : x \cdot 0 = 0$$

^۱Robinson arithmetic

$$6- \forall x, y : x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$

$$7- \forall x : x \neq 0 \rightarrow \exists y : x = s(y)$$

$$8- \forall x, y : x < y \leftrightarrow \exists z : s(z) + x = y$$

با وجود سادگی اصول، این نظریه توانایی های زیادی دارد؛ تمامی توابع بازگشتی جزئی^۲ در این نظریه قابل نمایش هستند و قضیه اول ناتمامیت هم در این نظریه قابل اثبات است ([۵]). برای تعریف توابع بازگشتی جزئی، ابتدا باید مجموعه توابع «بازگشتی مقدماتی»^۳ را تعریف کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. توابع «بازگشتی مقدماتی» کوچکترین مجموعه از توابع $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ است که شامل تابع ثابت صفر ($Z(x) = 0$)، تابع تالی ($S(x) = x + 1$)، و توابع تصویر ($h(x_1, \dots, x_n) = x_i$) بوده و تحت ترکیب و بازگشت بسته باشد، یعنی اگر توابع:

$$f(x_1, \dots, x_m), g_1(y_1, \dots, y_n), g_m(y_1, \dots, y_n)$$

بازگشتی مقدماتی باشند، آنگاه تابع $h(y_1, \dots, y_n) = f(g_1(y_1, \dots, y_n), \dots, g_m(y_1, \dots, y_n))$ نیز بازگشتی مقدماتی است و اگر توابع $f(x_1, \dots, x_n)$ و $g(y, z, x_1, \dots, x_n)$ بازگشتی مقدماتی باشند، آنگاه تابع $h(y, x_1, \dots, x_n)$ که به صورت زیر تعریف می شود نیز بازگشتی مقدماتی است:

$$h(y, x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) & \text{if } y = 0 \\ g(y - 1, h(y - 1, x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n) & \text{if } y > 0 \end{cases}$$

تعریف ۲.۱.۱. برای هر تابع $f(x, y_1, \dots, y_n)$ قرار می دهیم:

$$\mu_x(f(x, y_1, \dots, y_n) = 0) = \begin{cases} a & \text{if } a \text{ is minimum } x \text{ which satisfies } f(x, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \uparrow & \text{if there is no such } a \end{cases}$$

(نماد $\uparrow$ به این معنا است که در این حالت $\mu_x(f(x, y_1, \dots, y_n) = 0)$ تعریف نشده است).

^۲partial recursive functions

^۳primitive recursive

مثال ۳.۱.۱. تابع جمع بازگشتی اولیه است، چون:

$$x + y = \begin{cases} x & \text{if } y = 0 \\ s(x + (y - 1)) & \text{if } y > 0 \end{cases}$$

مثال ۴.۱.۱. تابع ضرب بازگشتی اولیه است، چون:

$$x \cdot y = \begin{cases} 0 & \text{if } y = 0 \\ x \cdot (y - 1) + x & \text{if } y > 0 \end{cases}$$

مثال ۵.۱.۱. تابع توان (2^x) بازگشتی اولیه است، چون:

$$2^x = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0 \\ 2 \cdot 2^{(x-1)} & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

مثال ۶.۱.۱. تابع زیر با توجه به تعریف آن بازگشتی اولیه است:

$$P(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ x - 1 & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

مثال ۷.۱.۱. تابع زیر نیز با توجه به مثال‌های قبل بازگشتی اولیه است:

$$\text{neg}(x, y) = \begin{cases} x & \text{if } y = 0 \\ P(\text{neg}(x, y - 1)) & \text{if } y > 0 \end{cases}$$

مثال ۸.۱.۱. تابع زیر نیز، با توجه به تعریف آن، بازگشتی اولیه است:

$$\text{Sgn}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ 1 & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

تعریف ۹.۱.۱. یک رابطه $R \subseteq \mathbb{N}^k$ را بازگشتی اولیه گوئیم اگر تابع مشخصه آن، یعنی:

$$\chi_R(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{if } R(x_1, \dots, x_n) \\ 0 & \text{if } \neg R(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

بازگشتی اولیه باشد.

مثال ۱۰.۱.۱. رابطه «کوچکتر بودن» بازگشتی اولیه است، چون تابع مشخصه آن را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\chi_{<}(x, y) = \text{Sgn}(\text{neg}(x, y))$$

تعریف ۱۱.۱.۱. مجموعه توابع «بازگشتی جزئی» کوچکترین مجموعه از توابع است که شامل توابع بازگشتی اولیه بوده و تحت عملگر μ_x (تعریف شده در فوق) بسته باشد.

مثال ۱۲.۱.۱. تابع $f(x) = \lceil \sqrt{x} \rceil$ بازگشتی جزئی است، چون :

$$f(x) = \mu_z(\text{Sgn}(z^2 - x) = 0).$$

قضیه ۱۳.۱.۱. همه گزاره های زیر در Q قابل اثبات هستند:

$$A: \quad \forall x, y (x + y = 0 \rightarrow (x = 0 \vee y = 0)).$$

$$B: \quad \forall x, y (x \cdot y = 0 \rightarrow (x = 0 \vee y = 0)).$$

$$C: \quad \forall x (x + \bar{1} = s(x)).$$

$$D: \quad \forall x (x \geq 0).$$

$$E: \quad \forall x (s(x) \leq \overline{n+1} \rightarrow x \leq \bar{n})$$

$$F: \quad \forall x (s(x) + \bar{n} = x + \overline{n+1})$$

$$G: \quad \forall x (x \geq \bar{n} \rightarrow (x = \bar{n} \vee x \geq \overline{n+1}))$$

برهان. اثبات قسمت A: اگر $y \neq 0$ آنگاه برای يك z مناسب داریم $y = s(z)$ و در نتیجه:

$$x + y = s(x + z) \neq 0$$

(با توجه به اصل های ۱ و ۴).

اثبات قسمت B: فرض کنید $x \neq 0$ و $y \neq 0$. پس برای u و v مناسب داریم $x = s(u)$ و $y = s(v)$ در نتیجه:

$$x \cdot y = s(u) \cdot s(v) = s(u) \cdot v + s(u) = s(s(u) \cdot v + u) \neq 0.$$

اثبات قسمت C:

$$x + \bar{1} = x + s(0) = s(x + 0) = s(x).$$

اثبات قسمت D: اگر $x = 0$ حکم بدیهی است و اگر $x \neq 0$ آنگاه برای یک z مناسب داریم $x = s(z)$. پس (بنا بر اصل ۳) داریم $s(z) + 0 = x$. حال از اصل ۸ نتیجه می شود $0 < x$.
اثبات قسمت E: اگر $s(x) = \overline{n+1}$ آنگاه از اصل ۲ نتیجه می شود $x = \bar{n}$ و حکم برقرار است. و اگر $s(x) < \overline{n+1}$ آنگاه برای یک z مناسب داریم:

$$s(z) + s(x) = \overline{n+1}$$

$$\Rightarrow s(s(z) + x) = s(\bar{n})$$

$$\Rightarrow s(z) + x = \bar{n}$$

$$\Rightarrow x < \bar{n}.$$

اثبات قسمت F: به استقرا (در فرا زبان) روی n عمل می کنیم. برای $n = 0$ داریم:

$$s(x) + 0 = s(x) = x + \bar{1}$$

(با توجه به قسمت C). حال فرض کنیم حکم برای n اثبات شده است و اثباتی برای حالت $n + 1$ به دست می آوریم:

$$s(x) + \overline{n+1} = s(x) + s(\bar{n}) = s(s(x) + \bar{n}) = s(x + \overline{n+1}) = x + \overline{n+2}.$$

(در تساوی دوم از اصل ۴ و در تساوی سوم از فرض استقرا استفاده شده است).

اثبات قسمت G : (استدلال درون نظریه Q) فرض کنیم $x \geq \bar{n}$ و $x \neq \bar{n}$. پس برای یک z مناسب داریم $s(z) + \bar{n} = x$ و با توجه به قسمت قبل نتیجه می‌شود $z + \overline{n+1} = x$ پس $x \geq \overline{n+1}$. $\square$

قضیه ۱۴.۱.۱. برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ گزاره‌های زیر در Q قابل اثبات هستند:

$$A: \quad \overline{m} + \bar{n} = \overline{m + n}.$$

$$B: \quad \overline{m} \cdot \bar{n} = \overline{m \cdot n}.$$

$$C: \quad \overline{m} \neq \bar{n} \text{ (if } m \neq n\text{.)}$$

$$D: \quad \forall x (x \leq \bar{n} \leftrightarrow (x = 0 \vee x = \bar{1} \vee \dots \vee x = \bar{n})).$$

$$E: \quad \forall x (x \leq \bar{n} \vee x \geq \bar{n}).$$

برهان. اثبات قسمت A : به استقرا (در فرا زبان) روی n عمل می‌کنیم. برای $n = 0$ حکم بلافاصله از اصل ۴ نتیجه می‌شود. حال فرض کنیم که حکم برای n اثبات شده است و آن را برای $n + 1$ اثبات کنیم:

$$\overline{m} + \overline{n+1} = \overline{m} + s(\bar{n}) = s(\overline{m} + \bar{n}) = s(\overline{m+n}) = \overline{m+n+1}$$

(در تساوی سوم از فرض استقرا استفاده شده است).

اثبات قسمت B : به استقرا (در فرا زبان) روی n عمل می‌کنیم. برای $n = 0$ حکم بلافاصله از اصل ۵ نتیجه می‌شود. حال فرض کنیم که حکم برای n اثبات شده است و آن را برای $n + 1$ اثبات کنیم:

$$\overline{m} \cdot \overline{n+1} = \overline{m} \cdot s(\bar{n}) = \overline{m} \cdot \bar{n} + \overline{m} = \overline{m \cdot n} + \overline{m} = \overline{m \cdot n + m} = \overline{m \cdot (n+1)}$$

(در تساوی سوم از فرض استقرا و در تساوی چهارم و پنجم از قسمت A استفاده شده است).

اثبات قسمت C : به استقرا (در فرا زبان) روی n عمل می‌کنیم. بنا بر تقارن می‌توان فرض کرد که $m < n$. حالت $n = 0$ غیر ممکن است. برای حالت $n = \bar{1}$ ، m باید الزاماً برابر ۰ باشد و درستی حکم از اصل ۱ نتیجه می‌شود. حال فرض کنیم که حکم برای n برقرار بوده و آن را برای $n + 1$

ثابت کنیم. اگر $m = 0$ حکم از اصل ۱ نتیجه می‌شود و اگر $m > 0$ پس $m = m_0 + 1$ (برای یک m_0 مناسب). چون درواقع $m_0 < n$ پس از فرض استقرا نتیجه می‌شود $Q \vdash \overline{m_0} \neq \overline{n}$ و از اصل ۲ نتیجه می‌شود $Q \vdash \overline{m_0 + 1} \neq \overline{n + 1}$ ، یعنی $Q \vdash \overline{m} \neq \overline{n + 1}$.

اثبات قسمت D : به استقرا (در فرا زبان) روی n عمل می‌کنیم. قسمت $\leftarrow$ بلافاصله از A نتیجه می‌شود. پس فقط قسمت $\rightarrow$ را اثبات می‌کنیم. برای $n = 0$ حکم از قسمت A قضیه ۱۴.۱.۱ نتیجه می‌شود. پس فرض کنیم $n > 0$. بنابراین $n = s(n_0)$ (برای یک n_0 مناسب). حال در نظریه Q چنین استدلال می‌کنیم:

اگر $x = 0$ حکم بدیهی است و اگر $x \neq 0$ ، پس یک z وجود دارد که $x = s(z)$. پس از $x \leq \overline{n + 1}$ نتیجه می‌شود که $z \leq \overline{n}$ (با توجه به فرض استقرا) $z = 0 \vee \dots \vee z = \overline{n}$. بنابراین $x = 1 \vee \dots \vee x = \overline{n + 1}$ ، یعنی $s(z) = 1 \vee \dots \vee s(z) = \overline{n + 1}$.

اثبات قسمت E : از قضیه ۱۳.۱.۱ قسمت D نتیجه می‌شود که $\forall x(x \geq 0)$. حال فرض کنیم که $Q \vdash \forall x(x \geq \overline{n} \vee x \leq \overline{n})$ و درون Q به این صورت استدلال می‌کنیم: اگر $x \leq \overline{n}$ آنگاه $x \leq \overline{n + 1}$ و حکم برقرار است. و اگر $x \geq \overline{n}$ آنگاه بنا بر قسمت G قضیه ۱۳.۱.۱ داریم $x = \overline{n}$ یا $x \geq \overline{n + 1}$ که در هر دو صورت حکم برقرار است. $\square$

قضیه ۱۵.۱.۱. برای هر گزاره Δ_0 مانند $\varphi(x)$ (با تنها متغیر آزاد x)، اگر جمله $\exists x\varphi(x)$ در مدل استاندارد حساب درست باشد آنگاه $Q \vdash \exists x\varphi(x)$

برهان. کافی است نشان دهیم برای هر فرمول Δ_0 مانند $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ ، اگر $\mathbb{N} \models \varphi(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n})$ آنگاه $Q \vdash \varphi(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n})$. با توجه به قضیه ۱۴.۱.۱، قسمت‌های A و B ، برای هر ترم $t(x_1, \dots, x_n)$ و هر $n, k_1, \dots \in \mathbb{N}$ داریم:

$$Q \vdash (\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n}) = \overline{Val(t(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n}))}$$

(برای مثال $(Q \vdash \overline{2} + (\overline{3} * \overline{5}) = \overline{17})$). حال از قضیه ۱۴.۱.۱ نتیجه می‌شود که حکم برای حالت‌هایی که $\varphi(x)$ گزاره‌ای اتمی یا نفیض یک گزاره اتمی باشد برقرار است. (با توجه به این نکته که اگر $\mathbb{N} \models \neg(\overline{k} \leq \overline{m})$ آنگاه $m < k$ و با توجه به قضیه ۱۴.۱.۱:

$$Q \vdash \overline{k} \leq \overline{m} \rightarrow (\overline{k} = 0 \vee \dots \vee \overline{k} = \overline{m}).$$

به سادگی و با کمک استقرا می‌شود که حکم برای فرمولهایی که از ترکیب فرمولهای اتمی (یا نقیض اتمی) با کمک رابطهای منطقی به دست می‌آیند نیز برقرار است. در آخر فرض کنیم که فرمول φ به صورت $\exists y \leq x_1 \psi(y, x_2, \dots, x_n)$ باشد و $\mathbb{N} \models \varphi(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n)$. پس برای یک $k_0 \leq k_1$ داریم $\mathbb{N} \models \psi(\bar{k}_0, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_n)$. از فرض استقرا نتیجه می‌شود که $Q \vdash \psi(\bar{k}_0, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_n)$. بنابراین $Q \vdash \varphi(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_n)$ برای گزاره‌هایی که به صورت $\forall y \leq x_1 \psi(y, x_2, \dots, x_n)$ باشند، حکم به روش مشابه اثبات می‌شود. $\square$

قضیه فوق در واقع نشان می‌دهد که نظریه Q ، « Σ_1 - کامل» است، یعنی تمام گزاره‌های درست و Σ_1 را اثبات می‌کند.

تعریف ۱۶.۱.۱. گوییم تابع $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ در نظریه T نمایش‌پذیر^۴ است اگر یک فرمول $F(x, y)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $f(m) = n$ اگر و فقط اگر $T \vdash \forall y (y = \bar{n} \leftrightarrow F(\bar{m}, y))$.

می‌توان ثابت کرد که همه توابع بازگشتی در نظریه Q نمایش‌پذیر هستند ([۵]). «مدل استاندارد حساب»^۵، یعنی مدلی که دامنه آن اعداد طبیعی و همه نمادهای $0, s, +, \cdot, <$ به صورت عادی تعبیر می‌شوند، را با $\mathbb{N}$ نشان می‌دهیم. منظور از $\mathbb{N} \models \varphi$ این است که φ در مدل استاندارد درست است. نتیجه زیر، که به لم قطری^۶ معروف است، نقش مهمی در اثبات قضیه گودل و بسیاری نتایج دیگر دارد:

لم ۱۷.۱.۱. برای هر فرمول $A(x)$ (با تنها متغیر آزاد x)، یک جمله ψ وجود دارد به طوری که:

$$Q \vdash \psi \leftrightarrow A(\overline{\neg \psi}).$$

^۴representable

^۵standard model of arithmetic

^۶diagonal lemma

برهان. برای هر فرمول A «قطری سازی»^۶ فرمول A را برابر فرمول $\exists x(x = \ulcorner A \urcorner \wedge A)$ تعریف می‌کنیم. دقت کنید که اگر A فرمولی با تنها متغیر آزاد x باشد آنگاه فرمول فوق در واقع معادل $A(\ulcorner A \urcorner)$ می‌باشد. ولی البته برای هر فرمول دلخواه قطری سازی آن خوش تعریف است. به سادگی می‌توان نشان داد که یک تابع بازگشتی اولیه $diag$ وجود دارد که عدد گودل قطری سازی شده یک فرمول دلخواه را محاسبه می‌کند. چون $diag$ بازگشتی اولیه است پس در هر نظریه $T \supseteq Q$ نمایش پذیر است. فرض کنیم $Diag(x, y)$ فرمولی باشد که $diag$ را در نظریه T نمایش می‌دهد. پس برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ اگر $diag(m) = n$ آنگاه $diag(m) = n \leftrightarrow y = \bar{n}$ فرض کنید $B(x)$ فرمول $\exists y(Diag(x, y) \wedge A(y))$ باشد. فرض کنید b عدد گودل فرمول $B(x)$ باشد. گزاره G را برابر $\exists x(x = \bar{b} \wedge B(x))$ قرار می‌دهیم که به طور منطقی معادل $B(\bar{b})$ است. از $B(\bar{b})$ نتیجه می‌شود $A(\bar{c})$ که در آن c عددی است که در شرط $diag(b) = c$ صدق می‌کند. ولی c همان عدد گودل فرمول G می‌شد. پس $A(\ulcorner G \urcorner)$. برعکس: اگر $A(\ulcorner G \urcorner)$ آنگاه $\exists y(Diag(\bar{b}, y) \wedge A(x))$ و در نتیجه $\exists x(x = \bar{b} \wedge \exists y(Diag(x, y) \wedge A(x)))$ که همان G می‌باشد $\square$

در بعضی موارد به صورت تعمیم یافته این لم نیز نیاز داریم (که به صورت «پارامتری» لم قطری معروف است):

لم ۱۸.۱.۱. برای هر فرمول $A(x, y_1, \dots, y_n)$ (با متغیرهای آزاد x و $y_1, \dots, y_n$)، یک فرمول $\psi(y_1, \dots, y_n)$ وجود دارد به طوری که:

$$Q \vdash \forall y_1, \dots, y_n [\psi(y_1, \dots, y_n) \leftrightarrow A(\ulcorner \psi \urcorner, y_1, \dots, y_n)].$$

حساب پئانو (PA) از اضافه کردن اصول استقرا به حساب رابینسون به دست می‌آید. برای هر فرمول φ ، اصل استقرای مربوط به صورت زیر است:

$$\forall x [\varphi(x) \rightarrow \varphi(s(x))] \rightarrow [\varphi(0) \rightarrow \forall x \varphi(x)].$$

^۶diagonalization

سلسله مراتب حسابی^۸ به روش استاندارد تعریف می‌شود، یعنی $\Pi_0 = \Sigma_0 = \Delta_0$ مجموعه فرمولهایی است که در آن همه سورها محدود هستند (یعنی به صورت $\forall x < t(\dots)$ یا $\exists x < t(\dots)$ می‌باشند، که در آن t یک ترم است؛ به این فرمولها، «فرمول های کراندار»^۹ هم می‌گوییم) و Σ_{n+1} مجموعه فرمولها به صورت $\exists x_1 \dots \exists x_i A$ است که در آن A یک فرمول Π_n است و Π_{n+1} مجموعه فرمولها به صورت $\forall x_1 \dots \forall x_i A$ است که در آن A یک فرمول Σ_n می‌باشد. می‌توان در PA ثابت کرد که کلاس‌های Π_n و Σ_n تحت سورها های کراندار بسته هستند، یعنی مثلاً اگر $\exists x \varphi(x, y)$ یک فرمول Σ_n باشد، آنگاه $\forall y < t \exists x \varphi(x, y)$ را نیز می‌توان به صورت یک فرمول Σ_n نوشت ([۱۱]). برای همه نظریه‌های متداول حساب یک محمول Δ_0 مانند $\text{Proof}_T(y, x)$ وجود دارد که بیان می‌کند y عدد گودل یک اثبات (در نظریه T) برای فرمول با عدد گودل x است. «محمول اثبات پذیری»^{۱۰} برای نظریه T به صورت $\text{Pr}_T(x) \equiv \exists y \text{Proof}_T(y, x)$ تعریف می‌شود. برای یک نظریه در زبان حساب، « ω -سازگاری» به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۱۹.۱.۱. یک نظریه T را « ω -سازگار» گوییم اگر فرمولی مانند $\varphi(x)$ وجود نداشته باشد به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $T \vdash \varphi(\bar{n})$ و در عین حال $T \vdash \exists x \neg \varphi(x)$.

تعریف ۲۰.۱.۱. نظریه T را « n -سازگار» گوییم اگر فرمولی مانند $\varphi(x) \in \Pi_{n-1}$ وجود نداشته باشد به طوری که $T \vdash \exists x \varphi(x)$ و در عین حال برای هر $i \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $T \vdash \neg \varphi(\bar{i})$.

مفهوم n -سازگاری همان ω -سازگاری است که به فرمولهای Σ_n محدود شده است. بنابر قضیه معروفی از تارسکی^{۱۱} مفهوم درستی (در مدل استاندارد حساب) در زبان حساب قابل تعریف نیست. به عبارت دقیق:

قضیه ۲۱.۱.۱. محمولی مانند $\text{Tr}(x)$ در زبان حساب وجود ندارد به طوری که برای هر جمله φ داشته باشیم $\varphi \leftrightarrow \text{Tr}(\ulcorner \varphi \urcorner)$. $\mathbb{N} \models \text{Tr}(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \varphi$.

^۸arithmetical hierarchy

^۹bounded formula

^{۱۰}provability predicate

^{۱۱}A. Tarski

برهان. فرض کنیم چنین محمولی وجود داشته باشد. با کمک لم قطری، جمله α را طوری می‌سازیم که $Q \vdash \alpha \leftrightarrow Tr(\ulcorner \alpha \urcorner)$. چون Q یک نظریه درست است (یعنی همه اصول آن در مدل استاندارد حساب درست هستند)، پس:

$$(۱.۱) \quad \mathbb{N} \models \alpha \leftrightarrow \neg Tr(\ulcorner \alpha \urcorner).$$

حال به این صورت استدلال می‌کنیم: اگر $\mathbb{N} \models \alpha$ آنگاه از (۱.۱) نتیجه می‌شود $\mathbb{N} \models \neg Tr(\ulcorner \alpha \urcorner)$ و در نتیجه (بنا بر تعریف محمول Tr) باید داشته باشیم: $\mathbb{N} \models \alpha$ که یک تناقض است. و اگر $\mathbb{N} \models \neg \alpha$ آنگاه مجدداً از (۱.۱) نتیجه می‌شود که $\mathbb{N} \models Tr(\ulcorner \alpha \urcorner)$ ، در نتیجه $\mathbb{N} \models \alpha$ که دوباره یک تناقض است. $\square$

ولی اگر موضوع را به فرمولهای

Σ_n (یا Π_n) محدود کنیم، مفهوم درستی تعریف پذیر می‌شود:

لم ۲۲.۱.۱. برای هر $n \geq 1$ یک محمول $\Sigma_n\text{-True}(x)$ وجود دارد به طوری که برای هر فرمول Σ_n مانند φ داریم:

$$PA \vdash \Sigma_n\text{-True}(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \varphi.$$

خاصیتی مشابه برای فرمولهای Π_n نیز برقرار است. ضمناً برای هر $n \geq 1$ ، $\Sigma_n\text{-True}(x)$ خود فرمولی Σ_n و $\Pi_n\text{-True}(x)$ خود فرمولی Π_n است (برای اثبات، گزاره ۱۰۷۶ از مرجع [۵] را ببینید).

۲.۱ نظریه محاسبه‌پذیری

یک شمارش استاندارد از ماشین‌های تورینگ را با $M_0, M_1, M_2, \dots$ نشان می‌دهیم. در بعضی موارد از شمارش استاندارد استفاده می‌کنیم که در آن ابتدا همه ماشین‌های با یک دستورالعمل ظاهر می‌شوند، سپس همه ماشین‌ها با دو دستورالعمل و الی آخر. نماد $M_i(a) \downarrow = b$ به این معنی

است که ماشین تورینگ M_i با ورودی a متوقف شده و b را به عنوان خروجی تحویل می‌دهد. دنباله تهی را با نماد λ نشان می‌دهیم و $b \downarrow = M_i(\lambda)$ به این معنی است که ماشین M_i بدون دریافت ورودی (یعنی با اجرا بر روی نوار خالی) متوقف شده و خروجی b را تحویل می‌دهد.

در این رساله، تمام ماشین‌های تورینگ روی مجموعه نماد $\{0, 1, \mathbf{B}\}$ هستند (نماد $\mathbf{B}$ جای خالی را نمایش می‌دهد). دستورالعمل‌های ماشین تورینگ به صورت $q_i s_j s_k q_l X$ هستند که در آن $X \in \{\mathbf{R}, \mathbf{L}\}$. معنی این دستور این است که اگر ماشین در وضعیت درونی q_i نماد s_j را مشاهده کرد، آنگاه نماد s_k را به جای آن نوشته، وضعیت درونی ماشین را به q_l تغییر داده و سرک^{۱۲} ماشین را به سمت راست (اگر $X = \mathbf{R}$) و یا به سمت چپ (اگر $X = \mathbf{L}$) حرکت می‌دهد.

دو ماشین تورینگ که فقط با یک تغییر نام حالت‌های درونی قابل تبدیل به یکدیگر هستند را یکسان در نظر می‌گیریم. برای مثال دو ماشین $\{q_1 \mathbf{B} 1 q_1 \mathbf{R}\}$ و $\{q_5 \mathbf{B} 1 q_5 \mathbf{R}\}$ یکسان هستند. وقتی می‌نویسیم $M_i(x) = M_j(x)$ منظور این است که یا هر دو ماشین با ورودی x متوقف شده و خروجی یکسانی را تحویل می‌دهند، یا هیچکدام متوقف نمی‌شوند. به صورتی استاندارد می‌توان ماشین‌های تورینگ را با دنباله‌هایی دودویی متناهی (دنباله‌های متناهی از صفر و یک) رمزنگاری کرد. اگر m_i دنباله دودویی متناظر ماشین M_i باشد، طول دنباله m_i را «طول» آن ماشین می‌نامیم و با $|m_i| = |M_i|$ نمایش می‌دهیم. بنا بر قضیه معروفی از کلینی^{۱۳} یک محمول Δ_0 مانند $\tau(i, x, s)$ وجود دارد که بیان می‌کند ماشین تورینگ با کد i و ورودی x متوقف شده و s عدد گودل این محاسبه است ([۲۵] را ببینید). با کمی تغییر در این محمول، می‌توان فرض کرد i اندیس ماشین در یک شمارش استاندارد است.

قضیه ۱.۲.۱. یک «ماشین تورینگ جهانی»^{۱۴} مانند $\mathcal{U}$ وجود دارد به طوری که برای هر $i \in \mathbb{N}$ و هر دنباله دودویی k داریم:

$$\mathcal{U}(0^{|m_i|} 1 m_i k) = M_i(k).$$

(به عبارت دیگر، ماشین $\mathcal{U}$ با گرفتن کد یک ماشین و یک ورودی، عملکرد آن ماشین را شبیه سازی

^{۱۲}head

^{۱۳}S. Kleene

^{۱۴}universal Turing machine

می‌کند. در اینجا $0^{|m_i|}$ دنباله‌ای از $|m_i|$ تا ۰ متوالی است و $0^{|m_i|}1m_ik$ نشان دهنده دنباله‌ای است که از پشت سر هم قرار دادن $0^{|m_i|}$ ، ۱، m_i و k به دست می‌آید).

«ماشین تورینگ اراکل دار»^{۱۵} به شیوه معمول (مطابق مرجع [۲۵]) تعریف می‌شود. تفاوت این ماشین‌ها با ماشین تورینگ معمولی در این است که دارای دو نوار هستند؛ یکی مانند ماشین تورینگ معمولی برای انجام محاسبات (نوشتن و پاک کردن) اختصاص دارد و بر روی نوار دیگر تابع مشخصه یک مجموعه A ، که آن را «اراکل» می‌نامیم، نوشته شده است. نوار مربوط به اراکل فقط برای خواندن است و ماشین نمی‌تواند بر روی آن بنویسد. دستورهایی این ماشین‌ها به صورت $X q_m s_l s_k s_j q_i$ می‌باشد. این دستورها به این صورت عمل می‌کنند:

اگر ماشین در وضعیت درونی q_i بود و نماد s_j در مقابل سرک ماشین قرار داشت و نماد s_k در مقابل سرک مربوط به نوار اراکل، آنگاه نماد s_l را به جای s_j در نوار ماشین بنویس، حالت درونی را به q_m تغییر بده و هر دو سرک را به سمت راست (اگر $X = \mathbf{R}$) و یا به سمت چپ (اگر $X = \mathbf{L}$) حرکت بده.

اگر ماشین تورینگ اراکل دار M_i که از مجموعه A به عنوان اراکل استفاده می‌کند، با ورودی a متوقف شده و b را به عنوان خروجی تحویل دهد، می‌نویسیم $M_i^A(a) \downarrow = b$.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $A, B \subseteq \mathbb{N}$. گوییم مجموعه A «تقلیل پذیر تورینگ»^{۱۶} به مجموعه B است، اگر یک ماشین تورینگ اراکل دار M_i وجود داشته باشد به طوری که این ماشین با داشتن B به عنوان اراکل، تابع مشخصه مجموعه A را محاسبه کند. در این صورت می‌نویسیم $A \leq_T B$. اگر $A \leq_T B$ و $B \leq_T A$ هر دو برقرار باشند، آنگاه A و B را «هم‌ارز تورینگ»^{۱۷} گوییم و می‌نویسیم $A \equiv_T B$.

تعریف ۳.۲.۱. «درجه تورینگ»^{۱۸} یک مجموعه $A \subseteq \mathbb{N}$ (که با نماد $\deg_T(A)$ نشان می‌دهیم) برابر مجموعه زیر تعریف می‌شود:

^{۱۵}oracle Turing machine

^{۱۶}Turing reducable

^{۱۷}Turing equivalent

^{۱۸}Turing degree

$$\{X \subseteq \mathbb{N} : X \equiv_T A\}.$$

«مسئله توقف»^{۱۹} عبارت است از اینکه برای یک ماشین تورینگ و یک ورودی داده شده، آیا ماشین متوقف می‌شود یا خیر.

قضیه ۴.۲.۱. مسئله توقف «حل‌پذیر» نیست، یعنی الگوریتمی وجود ندارد که با داشتن اندیس یک ماشین تورینگ M_i و یک ورودی a مشخص کند که $M_i(a) \downarrow$ یا خیر.

برهان. فرض کنیم چنین نباشد. پس یک ماشین تورینگ M_j وجود دارد به طوری که برای هر i و a ، اگر $M_i(a) \downarrow$ آنگاه $M_j(i, a) = 1$ و در غیر این صورت $M_j(i, a) = 0$. حال تابع f را به این صورت تعریف می‌کنیم: اگر $M_j(i, i) = 0$ آنگاه قرار می‌دهیم $f(i) = 0$ و اگر $M_j(i, i) = 1$ قرار می‌دهیم $f(i) = M_i(i) + 1$. واضح است که تابع f محاسبه‌پذیر است. فرض کنیم M_k ماشین تورینگی باشد که f را محاسبه می‌کند. اگر $M_k(k) \uparrow$ آنگاه $M_j(k, k) = 0$ و در نتیجه $M_k(k) \downarrow = 0$ ، تناقض. و اگر $M_k(k) \downarrow$ آنگاه $M_j(k, k) = 1$ ، بنابراین $M_k(k) = M_j(k, k) + 1$ ، و در نتیجه $1 = 0$ ، تناقض. $\square$

درجه تورینگ مسئله توقف، که معادل درجه تورینگ مجموعه $\{i \in \mathbb{N} : M_i(i) \downarrow\}$ است را با نماد $0'$ نشان می‌دهیم. 0 نیز نشان دهنده درجه تورینگ^{۲۰} مجموعه توابع محاسبه‌پذیر و $0^{(n)}$ نشان دهنده n امین جهش تورینگ^{۲۱} درجه 0 می‌باشد که مطابق زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۵.۲.۱. برای هر درجه تورینگ a ، «جهش تورینگ» این درجه، که با نماد a' نشان داده می‌شود، برابر درجه تورینگ مجموعه $\{i \in \mathbb{N} : M_i^A(i) \downarrow\}$ تعریف می‌کنیم ($A \subseteq \mathbb{N}$ یک مجموعه دلخواه با درجه تورینگ a است).

(برای اطلاعات بیشتر سه فصل اول مرجع [۲۵] را ببینید). دامنه تعریف ماشین M_i را با $\mathcal{W}_i$ نشان می‌دهیم. یک مجموعه $A \subseteq \mathbb{N}$ را شمارش‌پذیر بازگشتی^{۲۲} (RE) گوئیم اگر یک $i \in \mathbb{N}$

^{۱۹}halting problem

^{۲۰}Turing degree

^{۲۱}Turing jump

^{۲۲}recursively enumerable

وجود داشته باشد که $A = \mathcal{W}_i$. واضح است که $\mathcal{W}_0, \mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_n, \dots$ يك شمارش از همه مجموعه‌هاي RE مي‌باشد.

تعریف ۶.۲.۱. يك مجموعه RE مانند A را «خلاق»^{۲۳} گوییم اگر تابع محاسبه‌پذیر f وجود داشته باشد به طوري که:

$$\forall i : \mathcal{W}_i \subseteq \bar{A} \rightarrow f(i) \in \bar{A} - \mathcal{W}_i$$

(نماد $\bar{A}$ نشان دهنده مکمل مجموعه A است).

مثالي از يك مجموعه خلاق، مجموعه $K = \{i : \mathcal{M}_i(i) \downarrow\}$ مي‌باشد (موسوم به مجموعه کانتور^{۲۴})، چون براي هر $\mathcal{W}_i \subseteq \bar{K}$ ، داریم:

$$i \in \mathcal{W}_i \leftrightarrow (\mathcal{M}_i(i) \downarrow) \leftrightarrow i \notin \bar{K}$$

و در نتیجه $i \in \bar{K} - A$.

قضیه ۷.۲.۱. (قضیه اول ناتمامیت گودل) براي هر نظريه RE مانند T که شامل Q و ω -سازگار باشد، يك گزاره G وجود دارد که از T مستقل است (يعني نه خود و نه نقیض آن در T قابل اثبات نیستند).

برهان. با کمک لم قطري سازي گزاره G را به طوري مي‌سازیم که:

$$(۲.۱) \quad Q \vdash \leftrightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner G \urcorner).$$

نشان مي‌دهیم که G از نظريه T مستقل است. اگر $T \vdash G$ آنگاه با توجه به اینکه $\text{Pr}_T(\ulcorner G \urcorner)$ يك گزاره درست و Σ_1 است و T شامل Q است، داریم $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner G \urcorner)$. ولي از (۲.۱) نتیجه مي‌شود:

^{۲۳}creative

^{۲۴}Cantor set

از دو نتیجه آخر نتیجه می‌شود که T ناسازگار است، تناقض. پس ثابت کردیم $T \vdash \neg \text{Pr}_T(\ulcorner G \urcorner)$ و اگر $T \vdash \neg G$ آنگاه با توجه به تعریف G داریم:

$$(۳.۱) \quad T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner G \urcorner).$$

از فرض $T \vdash \neg G$ و سازگار بودن T نتیجه می‌شود که $T \not\vdash G$. پس برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $\neg \text{Proof}_T(\bar{n}, \ulcorner G \urcorner)$ يك گزاره Σ_1 و درست، و در نتیجه اثبات پذیر در T است، یعنی برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$(۴.۱) \quad T \vdash \neg \text{Proof}_T(\bar{n}, \ulcorner G \urcorner).$$

□ حال از (۴.۱) و (۳.۱) نتیجه می‌شود که نظریه T ، ω -سازگار نیست، تناقض.

در پایان يك اثبات از قضیه اول ناتمامیت با استفاده از مفاهیم نظریه محاسبه پذیری، که منسوب به کلینی است، را ارائه می‌کنیم:

قضیه ۸.۲.۱. برای هر نظریه RE و درست در زبان حساب مانند Q $T \supseteq Q$ يك گزاره به صورت $\uparrow M_i(i)$ وجود دارد که مستقل از T می‌باشد.

برهان. مجموعه (اعداد گودل) گزاره‌های به صورت $\uparrow M_i(i)$ که در نظریه T قابل اثبات هستند يك مجموعه RE است. این مجموعه را با $\mathcal{W}_j$ نشان می‌دهیم. چون T شامل Q است، پس تمام گزاره‌های درست به صورت $\downarrow M_i(i)$ را اثبات می‌کند (چون همه این گزاره‌ها، Σ_1 هستند). در نتیجه هیچ گزاره نادرست به صورت $\uparrow M_i(i)$ در نظریه T قابل اثبات نیست (چون در غیر این صورت، نقیض آن گزاره، که گزاره‌ای Σ_1 و درست است، نیز در T قابل اثبات خواهد بود که خلاف فرض سازگاري T است). بنابراین $\mathcal{W}_j \subseteq \bar{K}$. با توجه به استدلالی که در فوق برای خلاق بودن مجموعه K ارائه کردیم، $j \in \bar{K} - \mathcal{W}_j$ و در نتیجه $\uparrow M_j(j)$ گزاره‌ای درست است که در نظریه T قابل اثبات نیست. از فرض درست بودن T نتیجه می‌شود که نقیض این گزاره هم در T قابل اثبات نیست. □

فصل ۲

بررسی امکان ساختاری شدن اثبات‌های بولوس و شایتین برای قضیه اول ناتمامیت

۱.۲ مقدمه

برهان اولیه گودل برای قضیه ناتمامیت بر اساس ساخت گزاره‌ای است که به طور شهودی می‌گوید «من اثبات پذیر نیستم». به بیان دقیق، با کمک لم قطری‌سازی یک گزاره G ساخته می‌شود به طوری که $PA \vdash G \iff \neg \text{Pr}_T(\ulcorner G \urcorner)$. حال به سادگی می‌توان نشان داد که اگر T سازگار باشد، آنگاه $T \not\vdash G$ و اگر $T \vdash \neg G$ سازگار باشد، آنگاه $T \not\vdash \neg G$. در قضیه دوم ناتمامیت نشان داده می‌شود که $T \vdash \text{Con}(T) \rightarrow G$ که $\text{Con}(T) \equiv \forall z (\neg \text{Proof}_T(z, \ulcorner 0 = 1 \urcorner))$ گزاره‌ای است که سازگاری T را بیان می‌کند و از اینجا بلافاصله نتیجه می‌شود که $T \not\vdash \text{Con}(T)$. همان طور که خود گودل هم اشاره می‌کند، گزاره‌ای که در این استدلال مورد استفاده قرار می‌گیرد، به نوعی، صوری شده پارادکس معروف دروغگو^۱ است: «شبهات این نتیجه با پارادکس ریچارد کاملاً روشن است، همچنین رابطه نزدیکی با پارادکس دروغگو دارد» [۴].

^۱liar paradox

این پارادکس در مورد جمله‌ای است که می‌گوید «این جمله نادرست است». اگر این جمله را درست فرض کنیم نتیجه می‌شود که همین جمله نادرست است و اگر نادرستی آن را بپذیریم بلافاصله درستی آن نتیجه می‌شود! گودل در همان نخستین مقاله‌ای که در مورد ناتمامیت منتشر کرد ([۴])، به این موضوع اشاره می‌کند که به جای پارادکس دروغگو می‌توان از پارادکس‌های دیگر هم برای اثبات پدیده ناتمامیت استفاده کرد: «...هر پارادکس مربوط به شناخت‌شناسی^۲ دیگر هم می‌تواند برای اثبات مشابهی برای تصمیم ناپذیری مورد استفاده قرار گیرد». این نکته چندین دهه مورد توجه قرار نگرفت، تا اینکه در دهه‌های ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰ اثبات‌هایی از قضیه (اول) ناتمامیت کشف شد که نه بر مبنای پارادکس دروغگو بلکه بر اساس پارادکس بری^۳ قرار داشتند. این اثبات‌ها توسط شاییتین^۴ و بولوس^۵ کشف شدند. قبل از ادامه بحث لازم است پارادکس بری را توضیح دهیم. این پارادکس در مورد جمله زیر است:

«کوچکترین عددی که توسط هیچ جمله‌ای با طول حداکثر چهارده کلمه تعریف نمی‌شود».

تعداد جملاتی که حداکثر ۱۴ کلمه دارند متناهی است، پس فقط تعداد متناهی عدد با این جملات تعریف می‌شوند. در نتیجه به نظر می‌رسد جمله فوق باید یک عدد منحصر به فرد مانند n_0 را تعریف کند. ولی با کمی دقت متوجه می‌شویم که این جمله خود ۱۳ کلمه دارد، یعنی n_0 خود توسط یک جمله با تعداد کلمات کمتر از ۱۴ کلمه تعریف شده! و این یک تناقض ایجاد می‌کند. نخستین اثباتی که استدلال آن به نوعی شبیه به پارادکس بری است توسط شاییتین و با استفاده از مفهوم پیچیدگی کولموگوروف^۶ ارائه شد. پیچیدگی کولموگوروف یک دنباله w معمولاً به عنوان طول کوچکترین ورودی j برای یک ماشین تورینگ جهانی مانند $\mathcal{U}$ تعریف می‌شود به طوری که $\mathcal{U}$ با دریافت ورودی j ، دنباله w را در خروجی چاپ کند. به عبارت دیگر:

$$(۱.۲) \quad \mathcal{K}_{\mathcal{U}}(w) = \min\{|j| : \mathcal{U}(j) \downarrow = w\}$$

^۲epistemology

^۳Berry paradox

^۴G. Chaitin

^۵G. Boolos

^۶Kolmogorov complexity

(نماد $|j|$ نشان دهنده طول دنباله j است). با در نظر گرفتن یک ماشین تورینگ جهانی ثابت، پیچیدگی کولموگوروف w را به طور ساده با $K(w)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۱.۲. (شایتین) برای هر نظریه سازگار و RE مانند $T \supseteq PA$ یک مقدار ثابت d_T وجود دارد که برای هر $e \geq d_T$ و هر w داریم: $T \not\vdash K(w) \geq e$. ضمناً اگر فرض کنیم که T درست نیز هست، آنگاه تمام گزاره‌های درست (در مدل استاندارد) به صورت $K(w) \geq e$ (که در آن $e \geq d_T$) مستقل از T هستند (یک نظریه را «درست»^۷ گوییم اگر همه اصول آن در مدل استاندارد حساب درست باشند).

برهان. چون نظریه T شمارش پذیر کارآمد (RE) است، پس یک ماشین تورینگ وجود دارد که قضیه‌های T را شمارش می‌کند و می‌توان ماشین تورینگی ساخت که الگوریتم زیر را اجرا کند: قضیه‌های T را شمارش کن و هر زمان که قضیه‌ای به صورت $K(x) > m$ اثبات شد، x را در خروجی چاپ کن و متوقف شو.

(در این الگوریتم، m یک عدد طبیعی ثابت است).

چون طول نمایش دودویی عدد m برابر $\lceil \log_2(m+1) \rceil$ است، پس یک ماشین تورینگ جهانی برای اجرای این الگوریتم به یک ورودی به طول $\lceil \log_2(m+1) \rceil + c$ نیاز دارد (c مقداری ثابت). فرض کنیم که این ماشین بالاخره پس از اجرا متوقف شود، یعنی w موجود باشد که گزاره $K(w) > m$ در T قابل اثبات باشد. خروجی ماشین را با w نشان می‌دهیم. با توجه به ملاحظه فوق، پیچیدگی کولموگوروف w کمتر یا مساوی $\lceil \log_2(m+1) \rceil + c$ می‌باشد. پس داریم:

$$(۲.۲) \quad T \vdash K(w) \leq \overline{\lceil \log_2(m+1) \rceil + c}$$

(چونکه $K(w) \leq \overline{\lceil \log_2(m+1) \rceil + c}$ یک گزاره Σ_1 و درست می‌باشد و $T \supseteq PA$ ، پس در T قابل اثبات است). روشن است که برای m های به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$\lceil \log_2(m+1) \rceil + c < m$$

^۷sound

(چون $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{\lceil \log_2(m+1) \rceil + c} = +\infty$). در واقع اگر d_T کوچکترین جواب صحیح نامعادله

$$\lceil \log_2(x+1) \rceil + c < x$$

باشد، می‌توان m را بزرگتر یا مساوی d_T در نظر بگیریم و برای چنین m ‌هایی از (۲.۲) نتیجه می‌شود که $T \vdash \mathcal{K}(w) \leq \overline{m}$ ولی با توجه به فرض ما در مورد w ، $T \vdash \mathcal{K}(w) > \overline{m}$ و این با نتیجه قبلی متناقض است. پس برای m ‌های به اندازه کافی بزرگ، هیچ گزاره‌ای به صورت $\mathcal{K}(x) > \overline{m}$ در T قابل اثبات نیست. از فرض درست بودن نظریه T نتیجه می‌شود که نقیض هیچ گزاره درست به صورت $\mathcal{K}(x) > \overline{m}$ هم در T قابل اثبات نیست. $\square$

دومین اثبات بر اساس پارادکس بری توسط جورج بولوس ارایه شد ([۲]). در اینجا يك صورت از این اثبات که در ([۱۳]) ارایه شده است را بیان می‌کنیم. گوئیم يك فرمول $\varphi(x)$ (با تنها متغیر آزاد x) «عدد n را در نظریه T تعریف می‌کند» اگر:

$$T \vdash \forall x [\varphi(x) \leftrightarrow x = \overline{n}]$$

عدد گودل فرمول $\forall x (\varphi(x) \leftrightarrow x = \overline{n})$ را با $D(\ulcorner \varphi \urcorner, n)$ نشان می‌دهیم. در اینجا T يك نظریه ۱- سازگار و شامل PA می‌باشد. قرار دهید:

$$Df_T(x, y) \equiv \exists z [\text{length}(z) \leq y \wedge \text{Pr}_T(D(z, x))]$$

$\text{length}(x)$ يك تابع بازگشتی اولیه است که طول يك فرمول را محاسبه می‌کند). فرمول $Df_T(x, y)$ در واقع بیان می‌کند که عدد x با فرمولی به طول کمتر یا مساوی y قابل تعریف است. قرار می‌دهیم:

$$B_T(x, y) \equiv (\neg Df_T(x, y) \wedge \forall z < x Df_T(z, y))$$

معنای این فرمول این است که x کوچکترین عددی است که با فرمول‌های با طول کمتر یا مساوی y قابل تعریف نیست. طول این فرمول را با k_T نشان می‌دهیم. حال فرمول

$$S_T(x) \equiv \exists t (B_T(x, t) \wedge t = \overline{10} \times \overline{k_T})$$

را در نظر بگیرید. به سادگی ملاحظه می‌شود که طول این فرمول کمتر از $10k_T$ است (چون طول S_T برابر است با طول B_T بعلاوه نمادهایی که برای نوشتن $\overline{10} \times \overline{k_T}$ و قسمت باقی‌مانده فرمول $S_T(x)$ لازم است، یعنی در مجموع $4k_T + 40$ نماد. پس، با حل یک نامعادله ساده، ملاحظه می‌شود کوچکتر بودن طول این فرمول از $10k_T$ معادل $k_T \geq \frac{40}{6}$ است که آن هم به طور بدیهی برقرار است). پس اگر n_T کوچکترین عددی باشد که با فرمول‌های با طول کمتر یا مساوی $10k_T$ قابل تعریف نیست، آنگاه:

$$\mathbb{N} \models \neg \text{Df}_T(\overline{n_T}, \overline{10} \times \overline{k_T})$$

پس:

$$T \not\models \text{Df}_T(\overline{n_T}, \overline{10} \times \overline{k_T})$$

(چون T یک نظریه ۱-سازگار است و $\text{Df}_T(\overline{n_T}, \overline{10} \times \overline{k_T})$ یک Σ_1 گزاره نادرست است). ضمناً $T \vdash \neg \text{Df}_T(\overline{n_T}, \overline{10} \times \overline{k_T})$ نیز در T قابل اثبات نیست، چون اگر $T \vdash \neg \text{Df}_T(\overline{n_T}, \overline{10} \times \overline{k_T})$ آنگاه:

$$T \vdash \neg \text{Df}_T(\overline{n_T}, \overline{10} \times \overline{k_T}) \wedge \forall z < \overline{n_T} \text{Df}_T(z, \overline{10} \times \overline{k_T})$$

چون T یک نظریه Σ_1 تمام است و $\forall z < \overline{n_T} \text{Df}_T(z, \overline{10} \times \overline{k_T})$ معادل گزاره‌ای Σ_1 و درست است. در نتیجه $T \vdash S_T(\overline{n_T})$. به سادگی ملاحظه می‌شود که $\text{PA} \vdash \forall x, y [(S_T(x) \wedge S_T(y)) \rightarrow x = y]$ بنابراین $T \vdash S_T(\overline{n_T}) \wedge \forall z, y [(S_T(z) \wedge S_T(y)) \rightarrow z = y]$ و در نتیجه $T \vdash \forall x [S_T(x) \leftrightarrow x = \overline{n_T}]$. پس فرمول $S_T(x)$ عدد n_T را در نظریه T تعریف می‌کند. اما طول $S_T(x)$ کمتر از $10k_T$ است. بنابراین $T \vdash \text{Df}_T(\overline{n_T}, \overline{10} \times \overline{k_T})$ که با سازگاری T در تناقض است.

۲.۲ عدم امکان ساختاری شدن برهان بولوس

توجه کنید که اثبات بولوس (ارایه شده در فصل قبل) ساختاری نیست، چون نحوه محاسبه n_T (و در نتیجه جمله تصمیم‌ناپذیر $(\neg \text{Def}_T(\overline{n_T}, \overline{10} \times \overline{k_T}))$) را نمی‌گوید. حال این سوال به طور طبیعی مطرح می‌شود: آیا می‌توان n_T را به شیوه‌ای محاسبه پذیر از توصیف نظریه T به دست آورد؟ این سوال را می‌توان به روش‌های مختلفی صورتبندی کرد. صورت زیر شاید طبیعی‌ترین باشد:

سوال ۱: آیا تابع محاسبه پذیر f وجود دارد به طوری که برای هر نظریه ۱- سازگار مانند:

$$T = \text{PA} + \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$$

داشته باشیم $n_T \models f(\ulcorner \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m \urcorner)$ ؟

در ادامه ثابت می‌کنیم که تابع f (با تعریف بالا) محاسبه پذیر نیست.

تعریف ۱.۲.۲. دنباله $T_0, T_1, \dots, T_n, \dots$ را يك «دنباله بازگشتی از نظریه‌های RE» گوییم اگر همه T_i ها RE بوده و يك تابع محاسبه پذیر $v: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که مجموعه $\mathcal{M}_{v(n)}$ (اعداد گودل) اصول نظریه T_n را شمارش کند.

لم ۲.۲.۲. اگر $T_0, T_1, \dots, T_n, \dots$ يك دنباله بازگشتی از نظریه‌های RE باشد، آنگاه نظریه $T_\omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (T_i)$ نیز RE است.

برهان. الگوریتم زیر قضیه‌های T_ω را شمارش می‌کند:

- 1- Put $n := 1$
- 2- Execute n steps of each of machines $\mathcal{M}_{v(1)}, \dots, \mathcal{M}_{v(n)}$ and put the resulted sentences in a list.
- 3- Deduce all the logical consequences of the list constructed in line 2 which can be obtained by a proof of length $\leq n$ and print them.

4- Put $n:=n+1$ and goto 2.

□

در اینجا (به دلایلی فنی) از تابع پیچیدگی کولموگوروفی استفاده می‌کنیم که تعریف آن کمی با تعریفی که قبلاً ارایه شد متفاوت است و برابر کوچکترین اندیس i در یک شمارش استاندارد $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots$ از ماشین‌های تورینگ است که $\mathcal{M}_i(\lambda)$ متوقف شده و دنباله مورد نظر را به دست می‌دهد. این تابع را با $\mathcal{K}_2$ نشان می‌دهیم، به عبارت دیگر:

تعریف ۳.۲.۲. برای هر دنباله دودویی ω ، قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{K}_2(\omega) = \min\{i \in \mathbb{N} : \mathcal{M}_i(\lambda) \downarrow = \omega\}$$

.

لم ۴.۲.۲. تابع محاسبه‌پذیری مانند f وجود ندارد به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\mathcal{K}_2(f(n)) > n$.

برهان. فرض کنیم چنین تابعی وجود داشته باشد. ماشین تورینگی موجود است به طوری که $f(n)$ را محاسبه و در خروجی چاپ کند. اندیس این ماشین تابعی محاسبه‌پذیر از پارامتر n است. پس می‌توانیم این ماشین را با $\mathcal{M}_{g(n)}$ نشان دهیم که در آن g تابعی محاسبه‌پذیر و تام است (یعنی دامنه آن برابر تمام $\mathbb{N}$ است). با توجه به قضیه نقطه ثابت کلینی یک اندیس n وجود دارد به طوری که دو ماشین $\mathcal{M}_n$ و $\mathcal{M}_{g(n)}$ معادل هستند. چون $\mathcal{M}_{g(n)}(\lambda) \downarrow = f(n)$ پس $\mathcal{M}_n(\lambda) \downarrow = f(n)$ و در نتیجه $\mathcal{K}_2(f(n)) \leq n$ (با توجه به تعریف تابع $\mathcal{K}_2$). و این با فرضی که در مورد تابع f داریم در تناقض است. □

قرار می‌دهیم:

$$T_0 = \text{PA}$$

$$T_{s+1} = T_s + \neg \text{Df}_{T_s}(\overline{n_{T_s}}, \overline{10} \times \overline{k_{T_s}}) \quad (s \in \mathbb{N})$$

که در آن n_{T_s} و k_{T_s} مانند n_T و k_T (تعریف شده در برهان بولوس) برای نظریه T_s هستند. فرض کنید $\text{Ax}_{T_0}(x)$ یک فرمول Δ_0 باشد که مجموعه اصول PA را تعریف می‌کند و برای هر $s \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم:

$$\text{Ax}_{T_{s+1}}(x) \equiv \text{Ax}_{T_s}(x) \vee x = \ulcorner \neg \text{Df}_{T_s}(\overline{n_{T_s}}, \overline{10} \times \overline{k_{T_s}}) \urcorner$$

(توجه داریم که همه فرمول‌های Δ_0 ، $\text{Ax}_{T_s}(x)$ هستند). برای هر ماشین تورینگ $\mathcal{M}_i$ ، گزاره $\mathcal{M}_i(\lambda) \downarrow = x$ را می‌توان به صورت $\exists s(\tau(\bar{i}, 0, s) \wedge \nu(s) = x)$ نوشت (در اینجا ν یک تابع بازگشتی اولیه است که به کد محاسبه (s) مقدار خروجی را نسبت می‌دهد). با در نظر گرفتن اینکه منحصر به فرد بودن s در PA قابل اثبات است، این فرمول را به صورت معادل زیر نوشته و با $\psi_i(x)$ نشان می‌دهیم:

$$(۳.۲) \quad \psi_i(x) \equiv \exists s(\tau(\bar{i}, 0, s) \wedge \forall z < s \neg \tau(\bar{i}, 0, z) \wedge \nu(s) = x)$$

تعریف ۵.۲.۲. برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $g(n)$ را برابر بزرگترین عدد مانند l می‌گیریم به طوری که برای هر $s < l$ داشته باشیم $\text{length}(\ulcorner \psi_s(x) \urcorner) \leq n$ یک تابع Δ_0 است که طول فرمول با عدد گودل x را محاسبه می‌کند).

به وضوح تابع g محاسبه‌پذیر و صعودی است و $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = +\infty$.

لم ۶.۲.۲. برای هر $j \in \mathbb{N}$ ، اگر $\mathcal{M}_j(0) \downarrow = n$ ، آنگاه فرمول $\psi_j(x)$ عدد n را در هر نظریه $PA \supseteq T$ تعریف می‌کند.

برهان. Σ_1 - تمامیت T نتیجه می‌دهد که $T \vdash \psi_j(\bar{n})$. فرض کنید s_0 عدد منحصر به فردی باشد که در فرمول $A(s) \equiv \tau(\bar{j}, 0, s) \wedge \forall z < s \neg \tau(\bar{j}, 0, z)$ صدق می‌کند. با توجه به Σ_1 - کامل بودن T ، داریم $T \vdash \tau(\bar{j}, 0, \bar{s}_0) \wedge \forall z < \bar{s}_0 \neg \tau(\bar{j}, 0, z)$ و از $PA \vdash \forall z(z < \bar{s}_0 \vee z \geq \bar{s}_0)$ نتیجه می‌شود که: $T \vdash \exists! s[\tau(\bar{j}, 0, s) \wedge \forall z < s \neg \tau(\bar{j}, 0, z)]$ و بنابراین:

$$\square \quad T \vdash \forall x, y[(\psi_j(x) \wedge \psi_j(y)) \rightarrow x = y].$$

لم ۷.۲.۲. اگر $T \supseteq PA$ و $\mathbb{N} \models \neg \text{Df}_T(\bar{n}, \bar{10} \times \bar{k})$ آنگاه $\mathcal{K}_2(n) \geq g(10k)$.

برهان. اگر $\mathcal{K}_2(n) < g(10k)$ آنگاه يك $j < g(10k)$ وجود دارد به طوري که $\mathcal{M}_j(0) \downarrow = n$. با توجه به لم ۶.۲.۲، فرمول $\psi_j(x)$ عدد n را در T تعریف می‌کند. اما $\text{length}(\ulcorner \psi_j(x) \urcorner) \leq 10k$ (با توجه به تعریف تابع g). بنابراین n در نظریه T توسط فرمولی با طول کوچکتر یا مساوی $10k$ تعریف می‌شود. در نتیجه $\mathbb{N} \models \text{Df}_T(\bar{n}, \bar{10} \times \bar{k})$ که يك تناقض می‌باشد. $\square$

قضیه ۸.۲.۲. تابع f (تعریف شده در سوال ۱) محاسبه پذیر نیست.

برهان. فرض کنیم تابع f محاسبه پذیر باشد. پس می‌توانیم دنباله $\{T_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ را به طور بازگشتی بسازیم. توجه داریم که همه جملات $\neg \text{Df}_{T_s}(\bar{n}_s, \bar{10} \times \bar{k}_{T_s})$ در واقع درست هستند (چون اگر نادرست بود، آنگاه نقیض آن، که يك گزاره Σ_1 و درست می‌بود و در PA و T_s قابل اثبات می‌شد). از لم ۲ نتیجه می‌شود که $\mathcal{K}_2(n_s) > g(10k_{T_s})$. اگر تعریف فرمول‌های $B_{T_s}(x, y)$ و $B_{T_{s+1}}(x, y)$ را بنویسیم (برای هر $s \in \mathbb{N}$)، ملاحظه می‌کنیم که طول دومی از اولی بیشتر است (چونکه مجموعه اصول T_{s+1} با فرمول $\ulcorner \neg \text{Df}_{T_s}(\bar{n}_s, \bar{10} \times \bar{k}_{T_s}) \urcorner$ $\text{Ax}_{T_{s+1}}(x) \equiv \text{Ax}_{T_s}(x) \vee x = \ulcorner \neg \text{Df}_{T_s}(\bar{n}_s, \bar{10} \times \bar{k}_{T_s}) \urcorner$ تعریف می‌شود که طول آن بیشتر از $\text{Ax}_{T_s}(x)$ است). بنابراین: $\lim_{s \rightarrow +\infty} k_{T_s} = +\infty$ ، پس $10k_{T_s}$ و در نتیجه $g(10k_{T_s})$ می‌توانند به اندازه دلخواه بزرگ شوند. پس برای هر $i \in \mathbb{N}$ يك s وجود دارد که $g(10k_{T_s}) > i$ در نتیجه $i < \mathcal{K}_2(n_s)$. می‌توان n_s را به صورت الگوریتمی از روی i محاسبه کرد. پس یک تابع محاسبه پذیر $f(i) = n_s$ وجود دارد که برای هر i داریم $i < \mathcal{K}_2(f(i))$. اما این با لم ۴.۲.۲ در تناقض است. $\square$

بولوس خود تاکید می‌کند که اثبات او «نوع متفاوتی از استدلال» برای اثبات ناتمامیت است ([۲]). نتیجه ما نشان می‌دهد که برخلاف اثبات گودل و گونه‌های آن، اثبات بولوس ساختاری نیست. در بخش بعدی ثابت می‌کنیم که اثبات شایتین هم، مانند اثبات بولوس، ساختاری نیست. قضیه زیر در [۱۹] اثبات شده است:

گزاره ۹.۲.۲. فرض کنید T يك نظریه شامل PA باشد و تابع J به هر عدد طبیعی n عدد گودل فرمولی را نسبت دهد که n را در نظریه T تعریف کند و دارای کوتاهترین طول ممکن باشد. در این صورت تابع J محاسبه پذیر نیست.

برهان. فرض کنیم تابع J محاسبه‌پذیر باشد. بنابر تعریف این تابع، عدد n با فرمول‌هایی با طول کمتر از $\text{length}(J(n))$ تعریف نمی‌شود. پس $\mathbb{N} \models \neg \text{Df}_T(\bar{n}, \overline{\text{length}(J(n)) - 1})$. از لم ۷.۲.۲ نتیجه می‌شود که $(\dagger) \mathcal{K}_2(n) \geq g(\text{length}(J(n)) - 1)$. چون در زبان حساب فقط تعداد متناهی فرمول غیر هم‌ارز با طول کوچکتر یا مساوی n وجود دارد، پس فقط تعداد متناهی عدد توسط این فرمولها تعریف می‌شوند. پس با بزرگ شدن n ، $J(n)$ و در نتیجه $g(\text{length}(J(n)) - 1)$ می‌تواند به اندازه دلخواه بزرگ شود. بنابراین از $(\dagger)$ نتیجه می‌شود که برای هر i دلخواه، می‌توانیم به صورت محاسبه‌پذیر یک عدد $t(i)$ بیابیم به طوری که $\mathcal{K}_2(t(i)) \geq i$ و این با لم ۴.۲.۲ در تناقض است. $\square$

۳.۲ عدم امکان ساختاری شدن برهان شایتین

قضیه ۱.۳.۲. تابع محاسبه‌پذیری مانند R وجود ندارد به طوری که برای هر نظریه ۱-سازگار $\mathcal{K}(R(\ulcorner \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \urcorner)) > d_T$ عددی باشد که گزاره $R(\ulcorner \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \urcorner), T = PA + \{\alpha_1 \dots \alpha_n\}$ از T مستقل باشد.

برهان. فرض کنیم چنان تابع R محاسبه‌پذیری وجود داشته باشد. به منظور سادگی، برای هر نظریه

$$T = PA + \{\alpha_1 \dots \alpha_n\}$$

مقدار $\ulcorner \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \urcorner$ را با $\#(T)$ نشان می‌دهیم (اگر $n = 0$ باشد، $\#(T)$ برابر عدد گودل دنباله تهی خواهد بود). قرار می‌دهیم $T_0 = PA$ و T_i و $T_{i+1} = T_i + \mathcal{K}(R(\#(T))) > d_{T_i}$. نظریه T_ω را نیز برابر اجتماع همه T_i ها قرار می‌دهیم. هر نظریه T_{i+1} شامل یک گزاره است که در T_i قابل اثبات نیست $(\mathcal{K}(R(\#(T_i))) > d_{T_i})$. پس ماشین تورینگی که مجموعه قضیه‌های T_{i+1} را شمارش می‌کند از ماشین تورینگی که مجموعه قضیه‌های T_i را شمارش می‌کند متمایز است. در نتیجه ماشین تورینگ‌هایی که مجموعه قضیه‌های نظریه‌های T_i $(i \in \mathbb{N})$ را شمارش می‌کنند، دو به دو متمایز هستند. ماشین تورینگی که قضیه‌های T_i را شمارش می‌کند را با $\mathcal{M}_{t_i}$ نشان می‌دهیم. چون فقط تعدادی متناهی ماشین تورینگ از طول کوچکتر یا مساوی یک مقدار ثابت وجود دارد،

پس با بزرگ شدن اندیس i ، طول ماشین تورینگی که مجموعه قضیه‌های T_i را شمارش می‌کند (M_{t_i}) ، می‌تواند به اندازه دلخواه بزرگ شود. پس d_{T_i} ، که کوچکترین جواب صحیح نامعادله $d > |\mathcal{M}_{t_i}| + \lceil \log_2(d) \rceil + c$ است هم می‌تواند به اندازه دلخواه بزرگ شود. همه گزاره‌های $\mathcal{K}(R(\#(T_i))) > d_{T_i}$ در مدل استاندارد حساب درست هستند، چون اگر یکی از آنها نادرست باشد، آنگاه نقیض آن یک گزاره Σ_1 درست خواهد بود، پس $T \vdash \neg \mathcal{K}(R(\#(T_i))) > d_{T_i}$ (چون T شامل PA است) که با مستقل بودن $\mathcal{K}(R(\#(T_i))) > d_{T_i}$ از T_i در تناقض است. بنابراین نظریه T_ω یک نظریه درست (در مدل استاندارد حساب) و در نتیجه ۱- سازگار است. نظریه T_ω به وضوح RE نیز می‌باشد. پس از قضیه ناتمامیت شایتین نتیجه می‌شود که یک ثابت c_ω وجود دارد که T_ω نمی‌تواند هیچ گزاره به صورت $\mathcal{K}(x) > c_\omega$ را اثبات کند. ولی، همان طور که قبلاً گفتیم، d_{T_i} می‌تواند به اندازه دلخواه بزرگ شود. پس یک اندیس i وجود دارد که $d_{T_i} > c_\omega$ و با توجه به تعریف T_ω ، $T_\omega \vdash \mathcal{K}(R(\#(T_i))) > d_{T_i}$ که با نتیجه قبلی در تناقض است. $\square$

فصل ۳

بررسی امکان راسری سازی اثبات‌های بولوس و شایتین برای قضیه اول ناتمامیت

۱.۳ مقدمه

اثبات اولیه گودل برای قضیه اول ناتمامیت نیاز به فرض ω -سازگاری نظریه داشت. برای معاصرین گودل تعریف ω -سازگاری کمی غیرطبیعی به نظر می‌رسید و انتظار بر این بود که قضیه ناتمامیت فقط بر اساس فرض سازگاری معمولی نظریه ثابت شود. این کار اولین بار توسط ب. راسر^۱ انجام شد ([۱۸]). البته بعداً نشان داده شد که در اثبات اولیه خود گودل هم می‌توان شرط ω -سازگاری را به سازگاری مرتبه دو نظریه، یعنی $\text{Con}(T + \text{Con}(T))$ ، تقلیل داد و این شرط بهینه برای اثبات مستقل بودن گزاره گودلی است ([۸]).

در این فصل این سوال را بررسی می‌کنیم که آیا می‌توان کار مشابهی برای اثبات‌های بولوس و شایتین انجام داد؟ یعنی می‌توان این اثبات‌ها را فقط با فرض سازگاری ساده نظریه بنا کرد؟ (به این کار «راسری سازی» می‌گوییم). برای پاسخ به این سوال دو قضیه اثبات خواهیم کرد. در قضیه اول یک ناتمامیت بر اساس تابع پیچیدگی کولموگورف ثابت می‌کنیم که از بسیاری جهات شبیه قضیه

^۱B. Rosser

شایتین است و فقط به فرض سازگاری نظریه احتیاج دارد. پس، به يك معني، امکان راسري سازي اثبات شایتین وجود دارد. در مورد اثبات بولوس، قضیه‌ای شبیه قضیه بولوس اثبات می‌کنیم که نیاز به فرض سازگاری مرتبه دوم نظریه (یعنی $\text{Con}(T + \text{Con}(T))$) دارد و نشان خواهیم داد که این شرط از یک دیدگاه بهینه است، یعنی بر اساس فرض سازگاری ساده نظریه $(\text{Con}(T))$ نمی‌توان مستقل بودن گزاره‌ای که در اثبات بولوس معرفی می‌شود را اثبات کرد.

در این فصل فرض می‌کنیم که در شمارش $M_0, M_1, \dots, M_n, \dots$ از ماشین‌های تورینگ، ابتدا همه ماشین‌هایی که یک دستورالعمل دارند ظاهر می‌شوند، سپس همه ماشین‌هایی که دو دستورالعمل دارند و الی آخر. مجموعه دنباله‌ها از صفر و يك را به این صورت مرتب می‌کنیم: ابتدا دنباله با طول صفر (λ) سپس دنباله‌های به طول يك (به ترتیب الفبایی)، سپس دنباله‌های به طول دو (به ترتیب الفبایی) و الی آخر: $\lambda, 0, 1, 00, 10, 10, 11, 000, 001, \dots$. به این شیوه مرتب کردن دنباله‌های دودویی، ترتیب «طول-الفبایی» می‌گوییم. در این تناظر عدد ۰ متناظر دنباله λ است، عدد ۱ متناظر دنباله ۰، عدد ۲ متناظر دنباله ۱، عدد ۳ متناظر دنباله ۰۰ و الی آخر هستند.

λ	0	1	00	01	...
۰	۱	۲	۳	۴	...

لم ۱.۱.۳. برای هر $m \in \mathbb{N}$ داریم:

$$Q \vdash \forall z_0, \dots, z_k \left(\bigwedge_{0 \leq s \leq k} z_s < \bar{k} \rightarrow \bigvee_{\substack{0 \leq s, s' \leq k \\ s \neq s'}} z_s = z_{s'} \right)$$

برهان. استقرا (در فرا زبان) روی k : برای $k = 1$ باید اثبات کنیم

$$Q \vdash \forall z_0, z_1 [(z_0 < \bar{1} \wedge z_1 < \bar{1}) \rightarrow z_0 = z_1].$$

می‌دانیم $Q \vdash \forall z (z < \bar{1} \rightarrow z = 0)$ (برای اثبات قضیه ۱۰۶ مرجع [۵] را ببینید). پس $z_0 < \bar{1} \wedge z_1 < \bar{1}$ نتیجه می‌دهد $z_0 = 0 \wedge z_1 = 0$ ، بنابراین $z_0 = z_1$. حال فرض کنید درستی لم برای k اثبات شده است؛ درستی آن را برای $k + 1$ اثبات می‌کنیم، یعنی نشان می‌دهیم که

در Q استدلال می‌کنیم: فرض کنید $\bigwedge_{0 \leq s \leq k+1} z_s < \overline{k+1}$. حالت اول: اگر همه $z_0, \dots, z_{k+1}$ از $\overline{k}$ کوچکتر باشند:

$$\bigwedge_{0 \leq s \leq k} z_s < \overline{k} \implies \bigvee_{\substack{0 \leq s, s' \leq k \\ s \neq s'}} z_s = z_{s'} \implies \bigvee_{\substack{0 \leq s, s' \leq k+1 \\ s \neq s'}} z_s = z_{s'}$$

(در نتیجه گیری دوم از فرض استقرا استفاده شده است)

حالت دوم: اگر حداقل یکی از $z_0, \dots, z_{k+1}$ ، مثلاً z_0 ، برابر $\overline{k}$ باشد: پس اگر یکی دیگر از $z_1, \dots, z_{k+1}$ برابر $\overline{k}$ باشد، آنگاه $(z_s = z_{s'})_{0 \leq s, s' \leq k+1}$ به طور بدیهی نتیجه می‌شود، و اگر همگی از $\overline{k}$ کوچکتر باشند، دوباره:

$$\bigwedge_{1 \leq s \leq k+1} z_s < \overline{k} \implies \bigvee_{\substack{1 \leq s, s' \leq k+1 \\ s \neq s'}} z_s = z_{s'} \implies \bigvee_{\substack{0 \leq s, s' \leq k+1 \\ s \neq s'}} z_s = z_{s'}$$

□ (در نتیجه گیری دوم از فرض استقرا استفاده شده است) و این اثبات را کامل می‌کند.

نتیجه ۲.۱.۳. برای هر $m \in \mathbb{N}$ داریم:

$$Q \vdash \neg \exists i_0, \dots, i_{m+1} \left[\left(\bigwedge_{0 \leq s \leq m+1} i_s \leq \overline{m} \right) \wedge \bigwedge_{\substack{0 \leq s, t \leq m+1 \\ s \neq t}} (i_s \neq i_t) \right].$$

۲.۳ راسری سازی برهان شایتین

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید Γ یک مجموعه از جملات در زبان نظریه T باشد. گوئیم نظریه T ، « Γ -تصمیم گیرنده» است اگر برای هر $\alpha \in \Gamma$ داشته باشیم $T \vdash \alpha$ یا $T \vdash \neg \alpha$.

برای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $A_{(n,i)} = \{K_2(\omega) > n : \omega \in \mathbb{N}, \omega \geq i\}$.

لم ۲.۲.۳. فرض کنید T یک نظریه سازگار و RE در زبان حساب باشد و $PA \subseteq T$. برای هر دو عدد طبیعی دلخواه (و ثابت) n و i ، اگر $T, A_{(n,i)} -$ تصمیم گیرنده باشد، آنگاه یک $\omega \geq i$ وجود دارد که $T \vdash \mathcal{K}_2(\omega) > n$.

برهان. فرض کنید چنین ω وجود نداشته باشد. از آنجا که $T, A_{(n,i)} -$ تصمیم گیرنده است، پس برای هر $\omega \geq i$ داریم $T \vdash \mathcal{K}_2(\omega) \leq \bar{n}$ ، یعنی: $T \vdash \exists j(j \leq \bar{n} \wedge \mathcal{M}_j(\lambda) \downarrow = \omega)$. به طور خاص:

$$\begin{aligned} T \vdash \exists j(j \leq \bar{n} \wedge \mathcal{M}_j(\lambda) \downarrow = \bar{i}). \\ T \vdash \exists j(j \leq \bar{n} \wedge \mathcal{M}_j(\lambda) \downarrow = \overline{i+1}). \\ \vdots \\ T \vdash \exists j(j \leq \bar{n} \wedge \mathcal{M}_j(\lambda) \downarrow = \overline{i+k-1}). \end{aligned}$$

از ترکیب جمله های بالا به دست می آید:

$$T \vdash \exists j_1, \dots, j_k \left[\bigwedge_{1 \leq s \leq k} (j_s \leq \bar{n}) \wedge \mathcal{M}_{j_s}(\lambda) \downarrow = i + (s-1) \right]$$

بنابراین $T \vdash \bigwedge_{\substack{1 \leq s, t \leq k \\ s \neq t}} (j_s \neq j_t)$ و در نتیجه:

$$(۱.۳) \quad T \vdash \exists j_1, \dots, j_k \left(\left(\bigwedge_{1 \leq s \leq k} j_s \leq \bar{n} \right) \wedge \bigwedge_{\substack{1 \leq s, t \leq k \\ s \neq t}} (j_s \neq j_t) \right).$$

حال اگر در گزاره فوق قرار دهیم $k = n + 2$ ، به یک تناقض با نتیجه ۲.۱.۳ می رسیم و این اثبات را کامل می کند. $\square$

قضیه ۳.۲.۳. (صورت راسری شده قضیه شایتین) اگر $PA \subseteq T$ یک نظریه سازگار در زبان حساب باشد، یک ثابت c_T وجود دارد که برای هر $e \geq c_T$ ، تعداد نامتناهی $\omega \in \{0, 1\}^*$ موجوداند به طوری که گزاره $\mathcal{K}_2(\omega) > e$ از T مستقل می باشند.

برهان. بنا بر قضیه شایتین، يك ثابت c_T وجود دارد كه براي هر $e \geq c_T$ ، و هر w ، گزاره $\mathcal{K}_2(w) > e$ در نظريه T قابل اثبات نيست. يك $e \geq c_T$ در نظر بگيريد. اگر فقط تعدادي متناهي از اين گزاره‌هاي به صورت $\mathcal{K}_2(w) > e$ از نظريه T مستقل باشد، آنگاه يك w وجود دارد كه براي هر $w \geq w$ حداقل يكي از دو $\mathcal{K}_2(w) > e$ و $\neg(\mathcal{K}_2(w) > e)$ در T قابل اثبات است. پس، بنا بر تعريف، نظريه T ، $A_{(e,w)} -$ تصميم گيرنده مي‌شود. حال از لم ۲.۲.۳ نتيجه مي‌شود كه يك w وجود دارد به طوري كه $T \vdash \mathcal{K}_2(w) > \bar{e}$ و اين با قضيه ناتماميت شایتین (قضيه ۱.۱.۲)، كه مي‌گويد هيچ يك از اين گزاره‌ها در نظريه T قابل اثبات نيست، در تناقض است. $\square$

۳.۳ بررسی امکان راسری سازی برهان بولوس

حال ایده مشابهي را براي اثبات بولوس به كار مي‌بريم. همان طور كه در زير اثبات خواهد شد، در مورد اثبات بولوس حداقل شرط مورد نياز سازگاري ساده نظريه نيست، بلكه سازگاري مرتبه دو آن، يعني $\text{Con}(T + \text{Con}(T))$ الزامي است.

لم ۱.۳.۳. اگر T يك نظريه در زبان حساب باشد به طوري كه $T + \text{Con}(T)$ سازگار باشد، آنگاه يك n_1 وجود دارد به طوري كه $T \not\vdash \text{Df}_T(\bar{n}_1, \bar{10} \times \bar{k}_T)$.

برهان. فرض كنيد g_0 بيشترين عدد گودل فرمول‌هاي با طول كوچكتر يا مساوي 10_{k_T} باشد. اگر چنين n_1 وجود نداشته باشد، براي هر $n_1 \in \mathbb{N}$ خواهيم داشت $T \vdash \text{Df}_T(\bar{n}_1, \bar{10} \times \bar{k}_T)$ و در نتيجه

$$T \vdash \exists z < g_0(\text{Pr}_T(\text{D}(z, \bar{n}_1)))$$

(يادآوري مي‌كنيم كه $\text{D}(z, \bar{n}_1)$ به اين معني بود كه فرمول با عدد گودل z عدد n_1 را تعريف مي‌كند).
بنابراين براي هر $l \in \mathbb{N}$:

$$T \vdash \exists z < g_0(\text{Pr}_T(\text{D}(z, 0)))$$

$$T \vdash \exists z < g_0(\text{Pr}_T(\text{D}(z, \bar{1})))$$

⋮

$$T \vdash \exists z < g_0(\text{Pr}_T(D(z, \bar{l})))$$

پس:

$$(۲.۳) \quad T \vdash \exists z_0, \dots, z_l < g_0(\text{Pr}_T(D(z_0, 0)) \wedge \dots \wedge \text{Pr}_T(D(z_l, \bar{l}))).$$

اگر l را برابر g_0 قرار دهیم لم ۱.۱.۳ نتیجه می‌دهد: $\bigvee_{\substack{0 \leq s, s' \leq l \\ s \neq s'}} (z_s = z_{s'})$ و اگر این را با (۲.۳) ترکیب کنیم، داریم:

$$T \vdash \bigvee_{\substack{0 \leq s, s' \leq l \\ s \neq s'}} (\text{Pr}_T(D(z_s, \bar{s})) \wedge \text{Pr}_T(D(z_{s'}, \bar{s}')) \wedge z_s = z_{s'})$$

و چون $Q \vdash \forall x (x \leq \bar{l} \rightarrow (x = 0 \vee \dots \vee x = \bar{l}))$ (قضیه ۱.۰۶ مرجع [۵])، داریم:

$$(۳.۳) \quad T \vdash \bigvee_{\substack{0 \leq s, s' \leq l \\ s \neq s', 0 \leq z \leq l}} [\text{Pr}_T(D(z, \bar{s})) \wedge \text{Pr}_T(D(z, \bar{s}'))]$$

حال (استدلال درون T): برای هر $0 \leq z \leq l$ و $0 \leq s, s' \leq l$ ($s \neq s'$) اگر $\text{Pr}_T(D(\bar{z}, \bar{s})) \wedge \text{Pr}_T(D(\bar{z}, \bar{s}'))$ آنگاه:

$$\text{Pr}_T(D(\bar{z}, \bar{s}) \wedge D(\bar{z}, \bar{s}'))$$

$$\Rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\bar{s}) \wedge \varphi(\bar{s}') \wedge \forall u, w [\varphi(u) \wedge \varphi(w) \rightarrow u = w] \urcorner)$$

(φ فرمولی است که عدد گودل آن z می‌باشد)

$$\begin{aligned} &\Rightarrow Pr_T(\ulcorner \bar{s} = \bar{s}' \urcorner) \\ &\Rightarrow \neg \text{Con}(T) \end{aligned}$$

(چون $s \neq s'$). حال (۳.۳) نتیجه می‌دهد که $T \vdash \bigvee_{\substack{0 \leq s, s' \leq l \\ s \neq s', 0 \leq z \leq l}} (\neg \text{Con}(T))$ پس $T \vdash \neg \text{Con}(T)$ و این با فرض سازگاری $T + \text{Con}(T)$ در تناقض است. $\square$

قضیه ۲.۳.۳. اگر T یک نظریه در زبان حساب و شامل PA باشد و $T + \text{Con}(T)$ سازگار باشد، آنگاه یک $n_1 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $\neg \text{Df}_T(\bar{n}_1, \bar{10} \times \bar{k}_T)$ از T مستقل است.

برهان. طبق لم قبل، یک n_1 وجود دارد به طوری که $T \not\vdash \text{Df}_T(\bar{n}_1, \bar{10} \times \bar{k}_T)$. n_1 را کوچکترین عدد با این خاصیت انتخاب می‌کنیم. پس برای هر $z < n_1$ داریم:

$$T \vdash \text{Df}_T(\bar{z}, \bar{10} \times \bar{k}_T)$$

و در نتیجه:

$$(۴.۳) \quad T \vdash \forall z < \bar{n}_1 \text{Df}_T(z, \bar{10} \times \bar{k}_T).$$

اگر $T \vdash \neg \text{Df}_T(\bar{n}_1, \bar{10} \times \bar{k}_T)$ آنگاه از (۴.۳) نتیجه می‌شود:

$$(۵.۳) \quad T \vdash \neg \text{Df}_T(\bar{n}_1, \bar{10} \times \bar{k}_T) \wedge \forall z < \bar{n}_1 [\text{Df}_T(z, \bar{10} \times \bar{k}_T)].$$

یک شمارش ساده نشان می‌دهد که طول فرمول:

$$S_T(x) \equiv (\neg \text{Df}_T(x, \bar{10} \times \bar{k}_T) \wedge \forall z < x (\text{Df}_T(z, \bar{10} \times \bar{k}_T)))$$

کمتر از $10k_T$ است و به سادگی ملاحظه می‌شود که $PA \vdash \forall x, y [S_T(x) \wedge S_T(y) \rightarrow x = y]$ پس، با توجه به (۵.۳)، فرمول $S_T(x)$ ، با طولی کوچکتر از $10k_T$ ، عدد n_1 را تعریف می‌کند و در نتیجه $\square$ $T \vdash \text{Df}_T(\overline{n_1}, \overline{10} \times \overline{k_T})$ که با فرضی که در مورد n_1 داریم در تناقض است.

حال نشان می‌دهیم سازگاری $T + \text{Con}(T)$ شرط بهینه برای اثبات این قضیه است (و آن را به سازگاری ساده نظریه نمی‌توان تقلیل داد):

اگر $T + \text{Con}(T)$ سازگار نباشد، آنگاه $T \vdash \neg \text{Con}(T)$ پس $(T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner))$ واضح است که برای هر جمله θ داریم $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner (0 = 1) \rightarrow \theta \urcorner)$ ، پس $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \theta \urcorner)$ فرض کنید i_0 عدد گودل یک فرمول دلخواه از طول $10k_T$ باشد و سپس θ را فرمولی بگیرد که عدد گودل آن $D(i_0, n)$ می‌باشد (n یک عدد طبیعی دلخواه). داریم $T \vdash \text{Pr}_T(D(\overline{i_0}, \overline{n}))$ پس:

$$T \vdash \exists z [\text{length}(z) \leq \overline{10} \times \overline{k_T} \wedge \text{Pr}_T(D(z, \overline{n}))]$$

(چون i_0 عدد گودل فرمولی است که طول آن $10k_T$ است). بنابراین $T \vdash \text{Df}_T(\overline{n}, \overline{10} \times \overline{k_T})$ و در نتیجه $T \vdash \neg S_T(\overline{n})$ (با توجه به تعریف $S_T(x)$). پس برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، هیچ یک از دو گزاره $S_T(\overline{n})$ و $\text{Df}_T(\overline{n}, \overline{10} \times \overline{k_T})$ نمی‌توانند از نظریه T مستقل باشند.

فصل ۴

تعمیم قضیه گودل-راسر برای نظریه‌های تعریف‌پذیر

۱.۴ مقدمات

نظریه T را « Σ_n -تعریف‌پذیر»^۱ گوییم اگر مجموعه اصول آن توسط یک فرمول Σ_n قابل تعریف باشد؛ یعنی یک فرمول $Ax_T(x) \in \Sigma_n$ وجود داشته باشد به طوری که هر $i \in \mathbb{N}$ عدد گودل یک اصل از T است اگر و فقط اگر $\mathbb{N} \models Ax_T(\bar{i})$. « Π_n -تعریف‌پذیر» بودن به روش مشابه تعریف می‌شود. نظریه T را « Σ_n -درست»^۲ گوییم، اگر همه گزاره‌های Σ_n که در T قابل اثبات هستند در مدل استاندارد حساب درست باشند.

قضیه اول ناتمامیت می‌گوید که PA (و هر توسیع RE آن) Π_1 -ناتمام است، اما در مورد نظریه‌ای مانند $S = PA + \Pi_1 - Th(\mathbb{N})$ چه می‌توان گفت؟ آیا این نظریه کامل است؟ به وضوح این نظریه Π_1 -کامل و Σ_1 -کامل است، اما آیا می‌تواند، مثلاً، Π_2 -کامل هم باشد؟ دقت کنیم که S یک نظریه Π_1 -تعریف‌پذیر است.

^۱ Σ_n -definable

^۲ Σ_n -sound

یکی از اولین نتایج در مورد ناتمامیت نظریه‌های تعریف‌پذیر توسط یروسلوف^۳ به دست آمد
 $([۱۰])$:

قضیه ۱.۱.۴. (یروسلوف) اگر $T \supseteq PA$ یک نظریه سازگار باشد و مجموعه قضیه‌های آن مجموعه‌ای
 Δ_2 -تعریف‌پذیر باشد، آنگاه T نمی‌تواند همه گزاره‌های درست Π_1 را ثابت کند.

این قضیه جنبه دیگری از این نتیجه کلاسیک، که یک توسیع Δ_2 و کامل از PA وجود دارد،
 را روشن می‌سازد $([۲۳])$. دقت کنیم که در قضیه فوق شرط $Pr_T \in \Delta_2$ را نمی‌توان با صورت
 ضعیفتر $Pr_T \in \Sigma_2$ جایگزین کرد، چون برای مثال، نظریه S (بالا) Σ_2 -تعریف‌پذیر است و
 $\Pi_1 - Th(\mathbb{N}) \subseteq S$. قضیه یروسلوف توسط هایک^۴ به صورت زیر تعمیم داده شد $([۶])$:

قضیه ۲.۱.۴. (هایک) اگر $T \supseteq PA$ یک نظریه سازگار باشد و مجموعه قضیه‌های آن مجموعه‌ای
 Δ_n -تعریف‌پذیر باشد، آنگاه T نمی‌تواند همه گزاره‌های درست Π_{n-1} را ثابت کند.

نتیجه دیگری از هایک بیان می‌کند که اگر مجموعه قضیه‌های یک توسیع n -سازگار از PA ،
 Π_n -تعریف‌پذیر باشد، آنگاه آن نظریه نمی‌تواند Π_{n-1} -کامل باشد $([۶])$. او همچنین نشان داد
 که یک نظریه با شرایط فوق کامل هم نمی‌تواند باشد (در واقع یک گزاره Π_n مستقل از آن وجود
 دارد). ما این نتیجه را، با نشان دادن اینکه در واقع یک گزاره Π_{n-1} مستقل از نظریه وجود دارد،
 قوی‌تر می‌کنیم (لم ۳.۲.۴).

۲.۴ ملاحظات پیرامون اثبات هایک

تذکر ۱.۲.۴. (درباره اثبات قضیه ۲.۵ مرجع $[۶]$). در قضیه ۲.۵ مرجع $[۶]$ ، فرض شده است
 که نظریه T شامل PA ، n -سازگار و بسته تحت استنتاج بوده و همچنین مجموعه قضیه‌های آن
 Π_n -تعریف‌پذیر باشد (برای یک $n \geq 2$). سپس ثابت می‌شود که (الف): $\Pi_n - Th(\mathbb{N}) \not\subseteq T$ و
 همچنین (ب): T کامل نیست.

^۳R. Jeroslow

^۴P. Hájek

در اثبات (الف)، به منظور رسیدن به تناقض، فرض شده است که $\Pi_{n-2} - Th(\mathbb{N}) \subseteq T$ و در پایان اثبات (ب) ناسازگاری T از T -اثبات‌پذیری یک گزاره Π_{n-2} و نادرست نتیجه گرفته شده است (نشان داده شده با $(\tau_1(\bar{p}, \bar{m}, \bar{\varphi}))$). بدیهی است که اگر $\Pi_{n-2} - Th(\mathbb{N}) \subseteq T$ آنگاه هیچ گزاره نادرست و Π_{n-2} در T قابل اثبات نیست. احتمالاً منظور اثبات، استفاده از فرض $\Pi_{n-2} - Th(\mathbb{N}) \subseteq T$ (که نادرست است) نبوده، بلکه منظور استفاده از تمامیت و n -سازگاری T بوده تا ثابت کند T هیچ گزاره نادرست و Π_{n-2} را ثابت نمی‌کند. این موضوع را در لم بعد (که یک نقص کوچک و غیر اساسی در اثبات قضیه ۲۰۵ مرجع [۶] را پر می‌کند) اثبات می‌کنیم. این لم یک تعمیم برای قضیه ۲۰ مرجع [۸] است، که بیان می‌کند مجموعه گزاره‌های درست حساب در مدل استاندارد ($Th(\mathbb{N})$) تنها توسیع ω -سازگار و کامل از PA است.

لم ۲۰۲.۴. (تکمیل اثبات قضیه ۲۰۵ از [۶]). هر توسیع n -سازگار و Π_n -تصمیم‌گیرنده از PA، Π_n -کامل است.

برهان. استقرا بر روی n . برای $n = 0$ چیزی برای اثبات وجود ندارد. فرض کنیم حکم برای n برقرار باشد و آن را برای $n + 1$ ثابت کنیم. اگر نظریه T ، $(n + 1)$ -سازگار و Π_{n+1} -تصمیم‌گیرنده بوده ولی Π_{n+1} -کامل نباشد، آنگاه یک گزاره $\psi \in \Pi_{n+1} - Th(\mathbb{N})$ وجود دارد که $T \not\vdash \psi$. می‌نویسیم $\psi = \forall x \theta(x)$ که در آن $\theta \in \Sigma_n$ ؛ پس $\mathbb{N} \models \theta(\bar{m})$ (برای هر $m \in \mathbb{N}$). با توجه به فرض استقرا، T ، Π_n -کامل و در نتیجه Σ_n -کامل است؛ پس $T \vdash \theta(\bar{m})$ (برای هر $m \in \mathbb{N}$). از طرف دیگر، Π_{n+1} -تصمیم‌گیرنده بودن T و $T \not\vdash \psi$ نتیجه می‌دهد که $T \vdash \neg \psi$ ، یعنی $T \vdash \exists x \neg \theta(x)$ و این با فرض $(n + 1)$ -سازگاری T در تناقض است. $\square$

لم ۳۰۲.۴. (تعمیم قضیه (۲) ۲۰۵ مرجع [۶]). اگر بستر استنتاجی یک نظریه n -سازگار و شامل PA، Π_n -تعریف‌پذیر باشد، آنگاه یک گزاره Π_{n-1} مستقل از آن وجود دارد (برای هر $n \geq 2$).

برهان. اگر برای نظریه n -سازگار T داشته باشیم $PA \subseteq T$ و $\text{Pr}_T \in \Pi_n$ آنگاه از لم قبل (و $(n - 1)$ -سازگاری T) نتیجه می‌شود که $\Pi_{n-1} - Th(\mathbb{N}) \subseteq T$ و این با قضیه (۱) ۲۰۵ مرجع [۶]، که بیان می‌کند تحت شرایط فوق $\Pi_{n-1} - Th(\mathbb{N}) \not\subseteq T$ برقرار است، در تناقض می‌باشد. $\square$

۳.۴ برخی تلاش‌های اخیر

در نتایج یروسلفوف (قضیه ۲ مرجع [۱۰]) و تعمیم‌های هایک (قضیه‌های (۱) ۲۰۵ و ۲۰۸ مرجع [۶]) نتیجه‌ای در مورد ناتمامیت نداریم، بلکه فقط ثابت می‌شود نظریه شامل رده خاصی از گزاره‌های درست نیست. در نتایجی از هایک که شامل ناتمامیت هستند (نتایج ۱۰۳ و ۲۰۵ مرجع [۶]) فرض‌های قوی n -سازگاری یا Π_n -کامل بودن نظریه مورد استفاده قرار گرفته‌اند. یک سوال طبیعی این است که آیا می‌توان این شرط‌ها را با سازگاری ساده جایگزین کرد؟ (راسری سازی). برخی تلاش‌ها در این راستا انجام گرفته‌اند (مراجع [۹] و [۱۵]). یادآوری می‌کنیم که نتایج ناتمامیت گودل و راسر فقط برای نظریه‌های تعریف‌پذیر کاربرد دارند، چون برای مثال، نظریه تعریف‌ناپذیر $Th(\mathbb{N})$ کامل است. اثبات‌هایی که برای قضیه ناتمامیت گودل-راسر در مرجع‌های [۹] و [۱۵] ارائه شده‌اند هردو نادرست می‌باشند. برای نادرستی نتیجه مرجع [۱۵] می‌توانید [۲۰] و همچنین [۲۱] و [۱۶] را ببینید. نادرستی اثبات مرجع [۹] در تذکر زیر توضیح داده شده است. متأسفانه امکان اثبات ناتمامیت برای نظریه‌های تعریف‌پذیر بر پایه سازگاری ساده نظریه، حتی برای نظریه‌های Π_1 -تعریف‌پذیر، وجود ندارد؛ چون در نتیجه ۴.۶.۴ زیر نشان می‌دهیم یک توسیع Π_1 -تعریف‌پذیر و کامل از PA وجود دارد.

تذکر ۱.۳.۴. متأسفانه اثبات ارائه شده برای ناتمامیت گودل-راسر در مرجع [۹] نادرست است. در اثبات لم ۳ این مقاله، نویسنده لم قطری را برای فرمول $\neg F(x)$ به کار می‌برد که فرمول $F(x)$ در لم S فصل ۶ مرجع [۲۴] (به علاوه لم ۲ بخش ۵ مقاله مذکور) ساخته شده است. به سادگی ملاحظه می‌شود که $F \in \Pi_1$ و در نتیجه $A \in \Sigma_1$. اگر همان طور که در لم ۳ مرجع [۹] (و قضیه و نتیجه بعد از آن) ادعا شده، برای هر نظریه Π_1 -تعریف‌پذیر و شامل PA یک گزاره Σ_1 مانند A مستقل از آن نظریه وجود داشته باشد، آنگاه باید یک گزاره Π_1 وجود داشته باشد که از نظریه $PA + \Pi_1 - Th(\mathbb{N})$ مستقل باشد. ولی واضح است که این نظریه Π_1 -کامل و Σ_1 -کامل است، پس قضیه اصلی مرجع [۹] نمی‌تواند درست باشد. در واقع قدم نادرست در اثبات لم ۲ می‌باشد، آنجا که نویسنده می‌گوید: « m_1 می‌تواند طوری انتخاب شود که $m_2 \leq m_1$ و در نتیجه $(\bar{R}(k, m_2, Neg(n)))$ » ولی اگر m_1 به اندازه کافی بزرگ اختیار شود، شرط $\forall x \leq m_1 \bar{R}(k, x, Neg(n))$ ممکن است دیگر برقرار نباشد.

۴.۴ صورت معنایی قضیه ناتمامیت

قضیه اول ناتمامیت در صورت معنایی (و ضعیف‌تر) خود بیان می‌کند که هیچ نظریه RE و درست که شامل PA باشد نمی‌تواند Π_1 - کامل باشد. با توجه به اینکه مجموعه‌های RE دقیقاً همان مجموعه‌های Σ_1 - تعریف‌پذیر هستند، این قضیه می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\text{Gödel's 1st theorem: } PA \subseteq T \ \& \ Ax_T \in \Sigma_1 \ \& \ \mathbb{N} \models T \Rightarrow \Pi_1\text{-Th}(\mathbb{N}) \not\subseteq T$$

یک تعمیم طبیعی این قضیه به صورت زیر می‌باشد (فصل ۳ مرجع [۲۴] و نتیجه ۱ مرجع [۲۲] را ببینید).

قضیه ۱.۴.۴. اگر T یک نظریه درست، Σ_n - تعریف‌پذیر و شامل PA باشد، آنگاه T, Π_n - ناتمام است.

$$PA \subseteq T \ \& \ Ax_T \in \Sigma_n \ \& \ \mathbb{N} \models T \Rightarrow \Pi_n\text{-Th}(\mathbb{N}) \not\subseteq T$$

برهان. برای یک نظریه T با شرایط فوق، به کمک لم قطری جمله γ را طوری می‌سازیم که:

$$PA \vdash \gamma \leftrightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \gamma \urcorner).$$

به وضوح $\gamma \in \Pi_n$. نشان می‌دهیم $\mathbb{N} \models \gamma$ (†). چون اگر $\mathbb{N} \models \neg \gamma$ آنگاه $\mathbb{N} \models \text{Pr}_T(\ulcorner \gamma \urcorner)$ پس $T \vdash \gamma$ که با درست بودن T در تناقض است. حال نشان می‌دهیم $T \not\vdash \gamma$. به منظور رسیدن به تناقض، فرض می‌کنیم $T \vdash \gamma$. پس $\mathbb{N} \models \text{Pr}_T(\ulcorner \gamma \urcorner)$ و در نتیجه $\mathbb{N} \models \neg \gamma$ که با گزاره (†) در تناقض است. پس ثابت کردیم که $\gamma \in \Pi_n\text{-Th}(\mathbb{N}) \setminus T$. $\square$

نتیجه ۲.۴.۴. هیچ توسیع درست و Π_n - تعریف‌پذیر PA نمی‌تواند Π_{n+1} - کامل باشد.

برهان. کافی است دقت کنیم که هر نظریه Π_n - تعریف‌پذیر، Σ_{n+1} - تعریف‌پذیر هم است. $\square$

تذکر ۳.۴.۴. این واقعیت که $PA - \Sigma_1$ کامل، ولی Π_1 -نامتام است، کاملاً شناخته شده است (برای مثال مرجع [۵] را ببینید). پس Σ_1 -تمامیت، Π_1 -تمامیت را نتیجه نمی‌دهد. در حالت کلی، Σ_n -تمامیت، Π_n -تمامیت را نتیجه نمی‌دهد؛ چون برای مثال، نظریه $PA + \Sigma_n - Th(\mathbb{N})$ ، Σ_n -کامل است ولی Π_n -کامل نیست (بنا بر قضیه قبل). از طرف دیگر، Π_n -تمامیت، Σ_n -تمامیت، و در واقع Σ_{n+1} -تمامیت را نتیجه می‌دهد، چون برای هر گزاره Σ_{n+1} و درست مانند $\mathbb{N} \models \theta(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_k)$ که $\theta \in \Pi_n$ ، اعداد $n_1 \dots n_k \in \mathbb{N}$ وجود دارند که $\mathbb{N} \models \theta(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_k)$ چون نظریه T, Π_n -کامل فرض شده، داریم $T \vdash \theta(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_k)$ و در نتیجه:

$$T \vdash \exists x_1 \dots x_k \theta(x_1, \dots, x_k).$$

به طور نمادین:

$$\Pi_n - Th(\mathbb{N}) \subseteq T \Rightarrow \Sigma_{n+1} - Th(\mathbb{N}) \subseteq T$$

لم ۴.۴.۴. برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، نظریه T, Σ_n -درست است، اگر و فقط اگر نظریه $T + \Pi_n - Th(\mathbb{N})$ سازگار باشد.

برهان. فرض کنیم که نظریه T, Σ_n -درست باشد. اگر نظریه $T + \Pi_n - Th(\mathbb{N})$ سازگار نباشد، آنگاه $\pi_1, \dots, \pi_m \in \Pi_n - Th(\mathbb{N})$ با توجه به متناهی بودن اثبات، گزاره‌های $T + \Pi_n - Th(\mathbb{N}) \vdash \perp$ وجود دارند به طوری که $T + \pi_1 \wedge \dots \wedge \pi_m \vdash \perp$ و در نتیجه $T \vdash \neg(\pi_1 \wedge \dots \wedge \pi_m)$. چون $\pi_1 \wedge \dots \wedge \pi_m$ گزاره‌ای Π_n و درست است، پس $\neg(\pi_1 \wedge \dots \wedge \pi_m)$ گزاره‌ای Σ_n و نادرست خواهد بود، که با Σ_n -درست بودن T در تناقض است. برعکس، فرض کنیم نظریه $T + \Pi_n - Th(\mathbb{N})$ سازگار باشد. اگر T یک گزاره Σ_n و نادرست مانند σ را ثابت کند، آنگاه چون $\neg\sigma \in \Pi_n - Th(\mathbb{N})$ پس $T + \Pi_n - Th(\mathbb{N}) \vdash \neg\sigma$ ضمناً از $T \vdash \sigma$ نتیجه می‌شود $T + \Pi_n - Th(\mathbb{N}) \vdash \sigma$ که با سازگاری $T + \Pi_n - Th(\mathbb{N})$ در تناقض است. $\square$

شرط نحوي	نماد متعارف	شرط معنایي
$\text{CON}(T + ([\Pi_\infty]Th(\mathbb{N})))$	$\equiv \mathbb{N} \models T \equiv$	$[\Sigma_\infty] \text{ soundness of } T$
$\text{CON}(T + (\Pi_n - Th(\mathbb{N})))$	$\equiv - \equiv$	$\Sigma_n \text{ soundness of } T$
$\text{CON}(T + (\Pi_1 - Th(\mathbb{N})))$	$\equiv 1 - \text{CON}(T) \equiv$	$\Sigma_1 \text{ soundness of } T$
$\text{CON}(T + (\Pi_0 - Th(\mathbb{N})))$	$\equiv \text{CON}(T) \equiv$	$\Sigma_0 \text{ soundness of } T$

۵.۴ صورت کلی قضیه ناتمامیت گودل

صورت اولیه قضیه ناتمامیت گودل بیان می‌کند که هیچ توسیع شمارش‌پذیر بازگشتی و ω -سازگار از PA نمی‌تواند Π_1 -تصمیم‌گیرنده باشد. مفهوم نحوی ω -سازگاری به منظور اجتناب از مفهوم معنایی «درست بودن» ارائه شد. بعداً مشخص شد که برای اثبات قضیه ناتمامیت فرض ضعیفتر ۱-سازگاری، که معادل Σ_1 -درستی نظریه است، کافی می‌باشد (مرجع [۸] را ببینید).

$$PA \subseteq T \ \& \ Ax_T \in \Sigma_1 \ \& \ \text{CON}(T + \Pi_1 - Th(\mathbb{N})) \Rightarrow T \notin \Pi_1\text{-Deciding}$$

یک تعمیم طبیعی برای این صورت از قضیه ناتمامیت، Π_n -تصمیم‌گیرنده نبودن هر توسیع Σ_n -تعریف‌پذیر و سازگار با $\Pi_n - Th(\mathbb{N})$ است، که با کمک قضیه زیر اثبات خواهد شد.

قضیه ۱.۵.۴. اگر $T \supseteq PA$ یک نظریه Π_n -تعریف‌پذیر و سازگار با $\Pi_n - Th(\mathbb{N})$ باشد، آنگاه T ، Π_n -تصمیم‌گیرنده نیست.

$$PA \subseteq T \ \& \ Ax_T \in \Pi_n \ \& \ \text{CON}(T + \Pi_n - Th(\mathbb{N})) \Rightarrow T \notin \Pi_{n+1}\text{-Deciding}$$

برهان. با توجه به فرض، $T^* = T + \Pi_n - Th(\mathbb{N})$ یک نظریه سازگار است. محمول اثبات‌پذیری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\text{Proof}_{T^*}(z, x) \equiv \exists w, u, t \leq z [z = \langle w, u, t \rangle \wedge \Pi_n\text{-Th}(w) \wedge \text{conjAx}_T(u) \wedge \text{Proof}(t, w \wedge u \rightarrow x)]$$

(در عبارت فوق $\text{Proof}(x, y)$ محمول اثبات در منطق مرتبه اول است و $\langle x, y, z \rangle$ یک تابع کدگذاری استاندارد است که تناظری یک به یک بین $\mathbb{N}^3$ و $\mathbb{N}$ برقرار می‌کند و $\text{conjAx}_T(x)$ نیز یک فرمول Δ_0 است که بیان می‌کند x عدد گودل عطف تعدادی متناهی از اصول T است). روشن است $\text{Proof}_{T^*}(z, x)$ به این معنی است که z یک اثبات برای گزاره x در نظریه $T^* = T + \Pi_n\text{-Th}(\mathbb{N})$ می‌باشد. با کمک لم قطری سازی می‌توان یک گزاره γ ساخت به طوری که

$$(۱.۴) \quad T \vdash \gamma \leftrightarrow \forall z [\text{Proof}_{T^*}(z, \gamma) \rightarrow \exists z' < z \text{Proof}_{T^*}(z', \neg \gamma)]$$

به سادگی می‌توان ملاحظه کرد که γ یک گزاره Π_{n+1} است. نشان می‌دهیم که γ از T^* (و در نتیجه از T) مستقل است. فرض کنیم $T^* \vdash \gamma$. پس تعداد متناهی گزاره Π_n درست مانند $\pi_0, \dots, \pi_l$ و $a_0, \dots, a_m$ از اصول T وجود دارند به طوری که $(\pi_0 \wedge \dots \wedge \pi_l) \wedge (a_0 \wedge \dots \wedge a_m) \rightarrow \gamma$. قرار می‌دهیم $w_0 = \ulcorner \pi_0 \wedge \dots \wedge \pi_l \urcorner$ و $u_0 = \ulcorner a_0 \wedge \dots \wedge a_m \urcorner$ دقت می‌کنیم که برای یک t_0 مناسب، $\Pi_n\text{-Th}(w_0) \wedge \text{conjAx}_T(u_0) \wedge \text{Proof}(t_0, w_0 \wedge u_0 \rightarrow \gamma)$ یک گزاره درست (در مدل استاندارد) است، پس اگر قرار دهیم $z_0 = \langle w_0, u_0, t_0 \rangle$ داریم $\text{Proof}_{T^*}(z_0, \gamma)$. حال از تعریف γ نتیجه می‌شود که:

$$(۲.۴) \quad T^* \vdash \exists z' < z_0 \text{Proof}_{T^*}(z', \neg \gamma).$$

اما با توجه به سازگار بودن T^* تمام گزاره‌های $\text{Proof}_{T^*}(\bar{z}', \neg \gamma)$ ($z' \in \mathbb{N}$) در مدل استاندارد نادرست هستند. پس $\forall z < z_0 \neg \text{Proof}_{T^*}(z, \neg \gamma)$ یک گزاره درست است و در PA (و در نتیجه در T) قابل اثبات است که:

$$\forall z [z < \bar{z}_0 \leftrightarrow (z = 0 \vee \dots \vee z = \overline{z_0 - 1})]$$

پس:

$$T \vdash [\forall z < z_0 \neg \text{Proof}_{T^*}(z, \neg \gamma)] \leftrightarrow [\neg \text{Proof}_{T^*}(0, \neg \gamma) \wedge \dots \wedge \neg \text{Proof}_{T^*}(\overline{z_0 - 1}, \neg \gamma)]$$

و در نتیجه $\forall z < z_0 \neg \text{Proof}_{T^*}(z, \neg \gamma)$ معادل یک گزاره Σ_n است (به طور اثبات پذیر در T). چون T^* شامل همه گزاره‌های درست Π_n است، پس همه گزاره‌های درست Σ_n را هم اثبات می‌کند، در نتیجه $T^* \vdash \forall z < z_0 \neg \text{Proof}_{T^*}(z, \neg \gamma)$ که با (۲.۴) در تناقض است (چون T^* سازگار فرض شده). پس ثابت کردیم که $T^* \not\vdash \gamma$. حال ثابت می‌کنیم که $\neg \gamma$ هم در T^* قابل اثبات نیست. فرض کنیم $T^* \vdash \neg \gamma$ و $z_0 \in \mathbb{N}$ عدد گودل این اثبات باشد. چون $\text{Proof}_{T^*}(z_0, \neg \gamma)$ یک گزاره درست و Π_n است، پس $T^* \vdash \text{Proof}_{T^*}(z_0, \neg \gamma)$ و در نتیجه:

$$T^* \vdash \forall z > z_0 [\exists z' < z \text{Proof}_{T^*}(z', \neg \gamma)]$$

$$(۳.۴) \quad \Rightarrow T^* \vdash \forall z > z_0 [\text{Proof}_{T^*}(z, \gamma) \rightarrow \exists z' < z \text{Proof}_{T^*}(z', \neg \gamma)].$$

چون T^* سازگار است، پس برای هر $0 \leq z' \leq z_0$ داریم $\mathbb{N} \models \neg \text{Proof}_{T^*}(\bar{z}, \gamma)$ و در نتیجه $T^* \vdash \neg \text{Proof}_{T^*}(\bar{z}, \gamma)$. بنابراین

$$(۴.۴) \quad T^* \vdash \forall z \leq z_0 [\text{Proof}_{T^*}(z, \gamma) \rightarrow \exists z' < z \text{Proof}_{T^*}(z', \neg \gamma)].$$

حال از ترکیب ۳.۴ و ۴.۴ نتیجه می‌شود که

$$T^* \vdash \forall z \leq z_0 [\text{Proof}_{T^*}(z, \gamma) \rightarrow \exists z' < z \text{Proof}_{T^*}(z', \neg \gamma)]$$

و با توجه به تعریف γ داریم $T^* \vdash \gamma$ که با فرض $T^* \vdash \neg\gamma$ در تناقض است. پس ثابت شد که γ از T^* ، و در نتیجه از T ، مستقل است. $\square$

دقت کنیم که برای $n = 0$ قضیه فوق همان قضیه راسر می‌باشد و اثبات نسبتاً طولانی آن نیز بر اساس روش راسر است.

نتیجه ۲.۵.۴. هیچ توسیع Π_n -کامل و Π_n -تعریف‌پذیر از PA نمی‌تواند Π_{n+1} -تصمیم‌گیرنده باشد.

برهان. T, Π_n -کامل است، یعنی $\Pi_n - Th(\mathbb{N}) \subseteq T$. پس $T + \Pi_n - Th(\mathbb{N})$ سازگار است. حال از لم قبل نتیجه می‌شود که T, Π_{n+1} -تصمیم‌گیرنده نیست. $\square$

نتیجه ۳.۵.۴. هیچ توسیع Π_n -تعریف‌پذیر و n -سازگار از PA نمی‌تواند Π_{n+1} -تصمیم‌گیرنده باشد.

برهان. یک نظریه T با شرایط ذکر شده در فوق را در نظر بگیرید. اگر T, Π_n -تصمیم‌گیرنده نباشد آنگاه چیزی برای اثبات وجود ندارد، پس فرض کنیم که T, Π_n -تصمیم‌گیرنده است. حال از لم ۲.۲.۴ نتیجه می‌شود که $\Pi_n - Th(\mathbb{N}) \subseteq T$ ، پس $T + \Pi_n - Th(\mathbb{N})$ سازگار است و از قضیه ۱.۵.۴ نتیجه می‌شود که T, Π_{n+1} -تصمیم‌گیرنده نیست. $\square$

لم زیر تعمیمی از یک نتیجه شناخته شده، منسوب به کریگ^۵ را ارائه می‌کند.

لم ۴.۵.۴. برای هر $n \geq 1$ ، هر نظریه Σ_{n+1} -تعریف‌پذیر معادل یک نظریه Π_n -تعریف‌پذیر می‌باشد.

برهان. اگر $Ax_T(x) \equiv \exists x_1, \dots, x_n \theta(x, x_1, \dots, x_n)$ ، که در آن $\theta \in \Pi_n$ ، آنگاه:

$$Ax_T(x) \equiv \exists y \theta'(x, y)$$

^۵W. Craig

جایی که $\theta'(x, y) \equiv \exists x_1, \dots, x_n \leq y \theta(x, x_1, \dots, x_n) \in \Pi_n$ حال دقت می‌کنیم که نظریه:

$$T' = \{\psi \wedge (\bar{k} = \bar{k}) : \mathbb{N} \models \theta'(\ulcorner \psi \urcorner, \bar{k})\}$$

معادل نظریه T است و Π_n -تعریف‌پذیر توسط فرمول:

$$\text{Ax}_{T'}(x) \equiv \exists y, z \leq x [x = (y \wedge \ulcorner \bar{z} = \bar{z} \urcorner) \wedge \theta'(y, z)]$$

می‌باشد. □

قضیه ۵.۵.۴. برای هر $n \geq 1$ ، اگر T نظریه‌ای Σ_n -درست و Σ_{n+1} -تعریف‌پذیر باشد، آنگاه یک گزاره (درست) Π_{n+1} وجود دارد که مستقل از T است.

$$\text{PA} \subseteq T \ \& \ \text{Ax}_T \in \Sigma_{n+1} \ \& \ T \text{ is } \Sigma_n\text{-sound} \Rightarrow T \notin \Pi_{n+1}\text{-Deciding}$$

برهان. با توجه به لم قبل، T معادل یک نظریه Π_n -تعریف‌پذیر است. حال از قضیه ۱.۵.۴ نتیجه می‌شود که یک گزاره (درست) Π_{n+1} وجود دارد که مستقل از T است. □

می‌توان ثابت کرد که برای $n = 0, 1, 2$ ، دو مفهوم n -سازگاری و Σ_n -درستی معادل هستند ([۸])، اما برای $n > 2$ شرط n -سازگاری اکیداً از Σ_n -درستی ضعیف‌تر است. این امر از لم زیر نتیجه می‌شود (اثبات شده توسط جورج کرایزل^۶ در سال ۱۹۵۵، [۸]).

لم ۶.۵.۴. یک نظریه ω -سازگار وجود دارد که گزاره‌ای Σ_3 و نادرست را اثبات می‌کند.

برهان. یک عدد طبیعی $n \geq 2$ را در نظر بگیریم. ω -سازگاری یک نظریه T را می‌توان با گزاره زیر بیان کرد:

$$\omega\text{-Con}(T) \equiv \neg \exists \alpha [\text{Pr}_T(\ulcorner \exists x \alpha(x) \urcorner) \wedge \forall z \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \alpha(\bar{z}) \urcorner)].$$

^۶ G. Kreisel

با کمک لم قطری سازی، یک گزاره J می‌سازیم به طوری که:

$$\text{PA} \vdash J \leftrightarrow \neg \omega\text{-Con}(\text{PA} + J) \quad (\dagger).$$

به سادگی ملاحظه می‌شود که J گزاره‌ای Σ_3 است. اولاً نشان می‌دهیم که $\mathbb{N} \models \neg J$. اگر $\mathbb{N} \models J$ آنگاه $\text{PA} + J$ یک نظریه درست، و در نتیجه ω -سازگار می‌شد، ولی از $(\dagger)$ و $\mathbb{N} \models J$ نتیجه می‌شود $\mathbb{N} \models \neg \omega\text{-Con}(\text{PA} + J)$ که یک تناقض است. پس $\mathbb{N} \models \neg J$. حال مجدداً از $(\dagger)$ نتیجه می‌شود $\mathbb{N} \models \omega\text{-Con}(\text{PA} + J)$ ، پس نظریه $\text{PA} + J$ در واقع ω -سازگار است ولی گزاره Σ_3 و نادرست J را اثبات می‌کند. $\square$

لم بعد نشان می‌دهد که برای $n \geq 3$ دو شرط Σ_n -درستی و $(n+1)$ -سازگاری دو شرط غیر قابل مقایسه‌اند.

لم ۷.۵.۴. برای هر $n \geq 3$ ، یک نظریه $(n+1)$ -سازگار وجود دارد که Σ_n -درست نیست و برای هر $n > 0$ یک نظریه Σ_n -درست وجود دارد که $(n+1)$ -درست نیست.

برهان. روشن است که ω -سازگاری n -سازگاری را نتیجه می‌دهد (برای هر $n \in \mathbb{N}$). پس لم قبل مثالی برای قسمت اول به دست می‌دهد. برای قسمت دوم قرار می‌دهیم $T_0 = \text{PA} + \Pi_n\text{-Th}(\mathbb{N})$ و $T_1 = T_0 + \neg \gamma_{T_0}$ که در آن $\gamma_{T_0} \equiv \forall z [\text{Proof}_{T_0}(z, \gamma_{T_0}) \rightarrow \exists z' < z \text{Proof}_{T_0}(z', \neg \gamma_{T_0})]$. همان طور که قبلاً ثابت کردیم، γ_{T_0} یک گزاره Π_{n+1} و درست (در مدل استاندارد حساب) می‌باشد. پس برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $\mathbb{N} \models \theta(\bar{n})$ که در آن:

$$\theta(z) \equiv [\text{Proof}_{T_0}(z, \gamma_{T_0}) \rightarrow \exists z' < z \text{Proof}_{T_0}(z', \neg \gamma_{T_0})].$$

تمام جملات $\theta(\bar{n})$ عضو Σ_n هستند و $\Pi_n\text{-Th}(\mathbb{N}) \subseteq T_1$ پس $T_1 \vdash \theta(\bar{n})$ (برای هر $n \in \mathbb{N}$). اما $T_1 \vdash \neg \gamma_{T_0}$ یعنی $T_1 \vdash \exists z \neg \theta(z)$ ، بنابراین T_1 یک نظریه $(n+1)$ -سازگار نیست. $\square$

قضیه ۸.۵.۴. برای هر $n \geq 0$ ، اگر $T \supseteq \text{PA}$ یک نظریه n -سازگار و مجموعه اصول T نیز Σ_{n+1} -تعریف‌پذیر باشد، آنگاه یک گزاره Π_{n+1} وجود دارد که در T تصمیم‌پذیر نیست.

$$\text{PA} \subseteq T \ \& \ \text{Ax}_T \in \Sigma_{n+1} \ \& \ T \text{ is } n\text{-consistent} \Rightarrow T \notin \Pi_{n+1}\text{-Deciding}$$

برهان. اگر T دارای خاصیت Π_n -تصمیم گیرنده بودن نباشد، آنگاه Π_{n+1} -تصمیم گیرنده هم نیست و چیزی برای اثبات وجود ندارد. پس فرض می‌کنیم که T دارای خاصیت Π_n -تصمیم گیرنده بودن باشد. با توجه به لم ۲.۲.۴، $\Pi_n\text{-Th}(\mathbb{N}) \subseteq T$ ، پس T دارای خاصیت Σ_n -درست بودن می‌باشد. حال از قضیه ۵.۵.۴ نتیجه می‌شود که یک گزاره Π_{n+1} وجود دارد که در T تصمیم‌پذیر نیست. $\square$

۶.۴ بهینه بودن تعمیم

در این بخش نشان می‌دهیم که نتایج فوق، از یک دیدگاه، بهینه هستند و شرط‌های Σ_n -درستی و n -سازگاری را نمی‌توان به Σ_{n-1} -درستی یا $(n-1)$ -سازگاری تقلیل داد.

قضیه ۱.۶.۴. برای هر $n \geq 1$ ، یک نظریه Σ_{n-1} -درست، شامل PA ، Σ_{n+1} -تعریف‌پذیر و کامل وجود دارد.

برهان. قرار می‌دهیم $T_0 = \text{PA} + \Pi_{n-1}\text{-Th}(\mathbb{N})$ و $T_{i+1} = T_i + \varphi_i$ (اگر $T_{i+1} = T_i + \varphi_i$) سازگار باشد) و $T_{i+1} = T_i + \neg\varphi_i$ (اگر $T_{i+1} = T_i + \neg\varphi_i$ سازگار باشد). حال تعریف می‌کنیم: $T_\omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} T_i$ (در اینجا $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_3, \dots$ یک شمارش از مجموعه جمله‌ها در زبان حساب می‌باشد). T_ω توسط فرمول زیر قابل تعریف می‌باشد:

$$\begin{aligned} \text{Ax}_{T_\omega}(x) \equiv & \text{Ax}_{\text{PA}}(x) \vee \Pi_{n-1}\text{-Th}(x) \vee \exists y [\text{seq}(y) \wedge \forall j < \text{lh}(y) [(y)_j = \ulcorner \varphi_j \urcorner \wedge \\ & \text{Con}_{T_0}(\langle (y)_0, \dots, (y)_{j-1}, \varphi_j \rangle) \vee ((y)_j = \ulcorner \neg \varphi_j \urcorner \wedge \neg \text{Con}_{T_0}(\langle (y)_0, \dots, (y)_{j-1}, \varphi_j \rangle) \\ & \wedge \text{Con}_{T_0}(\langle (y)_0, \dots, (y)_{j-1}, \neg \varphi_j \rangle))] \wedge (y)_{\text{lh}(y)-1} = x]. \end{aligned}$$

محمول $\text{Con}_{T_0}(x)$ که در فرمول فوق به کار رفته است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Con}_{T_0}(x) \equiv & \text{seq}(x) \wedge \forall s, z [(\text{seq}(s) \wedge \forall i < \text{lh}(s) (\text{Ax}_{T_0}((s)_i) \vee (s)_i \in x)) \\ & \rightarrow \neg \text{Proof}(z, (\bigwedge_{i=0}^{\text{lh}(s)-1} (s)_i \rightarrow \perp))] \end{aligned}$$

$\text{seq}(x)$ به این معنی است که x عدد گودل یک دنباله از فرمول‌ها است و $\text{lh}(x)$ نشان دهنده طول آن دنباله می‌باشد (توجه کنیم که seq و lh هر دو Δ_0 هستند). به سادگی می‌توان ملاحظه کرد که Ax_{T_ω} (معادل) یک فرمول Σ_{n+1} است، پس T_ω یک نظریه Σ_{n+1} -تعریف‌پذیر می‌باشد. با توجه به تعریف، روشن است که T_ω سازگار و کامل است. دقت می‌کنیم که $\Pi_{n-1}\text{-Th}(\mathbb{N}) \subseteq T_\omega$ پس T_ω نمی‌تواند یک گزاره Σ_{n-1} نادرست را اثبات کند، پس T_ω, Σ_{n-1} -درست نیز می‌باشد. $\square$

لم ۲.۶.۴. الف: اگر یک نظریه Σ_n -درست باشد آنگاه n -سازگار هم است.

ب: اگر یک نظریه Σ_{n-1} -کامل و n -سازگار باشد، Σ_n -درست نیز است.

برهان. اثبات قسمت الف: فرض کنیم T یک نظریه Σ_n -درست باشد و $T \vdash \exists x \psi(x)$ که در آن ψ یک فرمول Π_{n-1} است. با توجه به Σ_n -درستی، $\mathbb{N} \models \exists x \psi(x)$ ، بنابراین $\mathbb{N} \models \psi(m)$ برای یک $m \in \mathbb{N}$. حال توجه کنیم که $\psi(\bar{m})$ یک گزاره Π_{n-1} و درست است، پس، با توجه به Σ_n -درست بودن T نتیجه می‌شود که $T \not\vdash \neg \psi(\bar{m})$. اثبات قسمت ب: فرض کنیم T نظریه‌ای Σ_{n-1} -کامل و n -سازگار باشد و $T \vdash \exists x \psi(x)$ که در آن ψ یک فرمول Π_{n-1} است. با توجه به n -سازگار بودن T ، یک $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $T \not\vdash \neg \psi(\bar{m})$. چون T یک نظریه Σ_{n-1} -کامل است، پس $\mathbb{N} \models \neg \psi(\bar{m})$ و در نتیجه $\mathbb{N} \models \psi(\bar{m})$ ، پس $\mathbb{N} \models \exists x \psi(x)$. $\square$

نتیجه ۳.۶.۴. برای هر $n \geq 1$ ، یک نظریه $(n-1)$ -سازگار، شامل PA ، Σ_{n+1} -تعریف‌پذیر و کامل وجود دارد.

برهان. با توجه به لم ۲.۶.۴، Σ_{n-1} -درستی $(n-1)$ -سازگاری را نتیجه می‌دهد، پس مثال ارایه شد در فوق $(n-1)$ -سازگار هم است. $\square$

نتیجه ۴.۶.۴. یک توسیع کامل و Π_1 -تعریف‌پذیر از PA وجود دارد.

برهان. با توجه به قضیه ۱.۶.۴ یک توسیع کامل و Σ_2 -کامل از PA وجود دارد و از ۴.۵.۴ نتیجه می‌شود که این نظریه معادل یک نظریه Π_1 -تعریف‌پذیر است. $\square$

۷.۴ غیر ساختاری بودن اثبات‌های با شرط n -سازگاری

نتیجه بعد نشان می‌دهد که غیر ساختاری بودن قضیه ناتمامیتی که با استفاده از شرط n -سازگاری اثبات شد، تصادفی نیست و در واقع هیچ برهان ساختاری برای آن وجود ندارد (برای $n \geq 3$). قبل از اثبات این مطلب، نیاز به لم زیر داریم (اثبات شده در [۸]).

لم ۱.۷.۴. برای هر نظریه ω -سازگار مانند T و هر جمله X ، حداقل یکی از دو نظریه $T + X$ یا $T + \neg X$ ، سازگار است.

برهان. فرض کنیم $T + X$ و $T + \neg X$ هیچکدام ω -سازگار نباشند. پس فرمولهای $A(x)$ و $B(x)$ وجود دارند به طوری که $(I) T + X \vdash \exists x A(x)$ ، $(II) T + \neg X \vdash \exists x B(x)$ ، و برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $(III) T + X \vdash \neg A(\bar{n})$ و $(IV) T + \neg X \vdash \neg B(\bar{n})$. پس، با توجه به (I) و (II) داریم:

$$\begin{aligned} T &\vdash [(X \wedge \exists x A(x)) \vee (\neg X \wedge \exists x B(x))] \\ \Rightarrow T &\vdash \exists x [(X \wedge A(x)) \vee (\neg X \wedge B(x))] \quad (V) \end{aligned}$$

از (III) و (IV) نتیجه می‌شود که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\begin{aligned} T &\vdash (X \rightarrow \neg A(\bar{n})) \wedge (\neg X \rightarrow \neg B(\bar{n})) \\ \Rightarrow T &\vdash \neg(X \wedge A(\bar{n})) \wedge \neg(\neg X \wedge B(\bar{n})) \\ \Rightarrow T &\vdash \neg[(X \wedge A(\bar{n})) \vee (\neg X \wedge B(\bar{n}))] \quad (VI) \end{aligned}$$

حال از (V) و (VI) نتیجه می‌شود که T یک نظریه ω -سازگار نیست، تناقض. $\square$

قضیه ۲.۷.۴. برای هر $n \geq 3$ تابعی بازگشتی جزئی مانند f (حتی نسبت به اراکل $0^{(n)}$) وجود ندارد به طوری که هرگاه m عدد گودل یک فرمول Σ_{n+1} باشد که یک نظریه n -سازگار و شامل PA را تعریف می‌کند، آنگاه $f(m)$ متوقف شده و عدد گودل یک گزاره مستقل از آن نظریه باشد.

برهان. فرض کنید یک تابع جزئی $0^{(n)}$ -محاسبه پذیر f با شرایط فوق وجود داشته باشد، یعنی برای هر Σ_{n+1} فرمول مانند Ψ ، اگر $\mathcal{T}_\Psi = \{\alpha \mid \mathbb{N} \models \Psi(\ulcorner \alpha \urcorner)\}$ نظریه ای n -سازگار و شامل PA باشد، آنگاه $f(\ulcorner \Psi \urcorner)$ متوقف شده و عدد گودل گزاره‌ای مستقل از $\mathcal{T}_\Psi$ را به دست دهد.

ω -سازگاری PA با گزاره (با عدد گودل) x را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\forall \chi [\exists z \exists q (\text{ConjAx}_{\text{PA}}(q) \wedge \text{Proof}(z, q \wedge x \rightarrow \exists v \chi(v))) \\ \rightarrow \exists v \forall z \forall q (\text{ConjAx}_{\text{PA}}(q) \rightarrow \neg \text{Proof}(z, q \wedge x \rightarrow \neg \chi(\bar{v})))]$$

فرمول فوق را با $\omega\text{-Con}_{\text{PA}}(x)$ نشان می‌دهیم. چون f تابعی $0^{(n)}$ -محاسبه‌پذیر است، پس گزاره‌های $f(x) = y$ و $f(x) \downarrow$ توسط فرمولهایی Σ_{n+1} قابل بیان هستند (برای مثال [۲۵] را ببینید). حال با استفاده از صورت پارامتری لم قطری، یک فرمول $\Theta(x)$ وجود دارد به طوری که:

$$\text{PA} \vdash \Theta(x) \equiv$$

$$[f(\ulcorner \Theta \urcorner) \downarrow \wedge \omega\text{-Con}_{\text{PA}}(f(\ulcorner \Theta \urcorner)) \wedge (x = f(\ulcorner \Theta \urcorner) \vee \text{Ax}_{\text{PA}}(x))] \vee$$

$$[f(\ulcorner \Theta \urcorner) \downarrow \wedge \neg \omega\text{-Con}_{\text{PA}}(f(\ulcorner \Theta \urcorner)) \wedge (x = \neg f(\ulcorner \Theta \urcorner) \vee \text{Ax}_{\text{PA}}(x))] \vee$$

$$\text{Ax}_{\text{PA}}(x).$$

با توجه به اینکه $n \geq 3$ ، به سادگی ملاحظه می‌شود که $\Theta(x)$ یک فرمول Σ_{n+1} است. اگر $f(\ulcorner \Theta \urcorner) \uparrow$ باشد، آنگاه $\Theta(x) \equiv \text{Ax}_{\text{PA}}(x)$ و در نتیجه $\mathcal{T}_{\Theta} = \text{PA}$ یک نظریه n -سازگار و شامل PA است. پس باید داشته باشیم $f(\ulcorner \Theta \urcorner) \downarrow$ که یک تناقض است. اگر نظریه $\text{PA} \cup \{f(\ulcorner \Theta \urcorner)\}$ ، ω -سازگار باشد، آنگاه $\Theta(x) \equiv (x = f(\ulcorner \Theta \urcorner) \vee \text{Ax}_{\text{PA}}(x))$ و در نتیجه $\mathcal{T}_{\Theta} = \text{PA} \cup \{f(\ulcorner \Theta \urcorner)\}$ که یک نظریه n -سازگار و شامل PA است. بنا بر فرضی که در مورد تابع f داریم، گزاره $f(\ulcorner \Theta \urcorner)$ باید از $\mathcal{T}_{\Theta}$ مستقل باشد که تناقض است. در نتیجه $\text{PA} \cup \{f(\ulcorner \Theta \urcorner)\}$ سازگار نیست. حال از لم ۱.۷.۴ نتیجه می‌شود که $\text{PA} \cup \{\neg f(\ulcorner \Theta \urcorner)\}$ باید ω -سازگار باشد. اما در این حالت داریم:

$$\Theta(x) \equiv (x = \neg f(\ulcorner \Theta \urcorner) \vee \text{Ax}_{\text{PA}}(x)).$$

پس $\mathcal{T}_{\Theta} = \text{PA} \cup \{\neg f(\ulcorner \Theta \urcorner)\}$ نظریه‌ای n -سازگار و شامل PA است، و در نتیجه $f(\ulcorner \Theta \urcorner)$ باید مستقل از $\mathcal{T}_{\Theta}$ باشد که مجدداً یک تناقض می‌باشد. $\square$

تذکر ۳.۷.۴. در الگوریتم فوق، شرط $0^{(n)}$ -محاسبه‌پذیر بودن f را نمی‌توان با $0^{(n+1)}$ -محاسبه‌پذیر بودن جایگزین کرد، زیرا با کمک اراکل $0^{(n+1)}$ می‌توان به صورت زیر یک گزاره تصمیم‌ناپذیر را پیدا کرد: چون نظریه مورد نظر Σ_{n+1} -تعریف‌پذیر است، پس این مسئله که یک گزاره داده شده در این نظریه اثبات‌پذیر است یا نه، توسط اراکل $0^{(n+1)}$ قابل تصمیم‌گیری است. حال کافی است یک جستجوی ساده روی همه گزاره‌های زبان حساب انجام دهیم؛ اگر نظریه n -سازگار باشد، بنا بر قضیه ۸.۵.۴، یک گزاره Π_{n+1} وجود دارد که از این نظریه مستقل است و جستجوی فوق در نهایت یکی از این گزاره‌ها را پیدا می‌کند.

۸.۴ آخرین نتایج

هایک در [۶]، پس از اثبات اینکه اگر مجموعه قضیه‌های یک نظریه Π_n, T -تعریف‌پذیر بوده (برای یک $n \geq 2$) و نظریه n -سازگار باشد، آنگاه T نمی‌تواند همه گزاره‌های درست Π_{n-1} را اثبات کند و ضمناً T کامل هم نیست (قضیه 2.5 در [۶])، این سوال را مطرح می‌کند که شرط n -سازگاری در قضیه فوق را ضعیف‌تر کرد یا خیر. اخیراً در این مورد این نتیجه اثبات شده است [۱۴]:

قضیه ۱.۸.۴. اگر مجموعه قضیه‌های یک نظریه سازگار $\Pi_{n+2}, T \supseteq PA$ -تعریف‌پذیر باشد، آنگاه Π_{n+1}, T -کامل نیست (یعنی نمی‌تواند همه گزاره‌های درست Π_{n+1} را اثبات کند).

برهان. فرض کنید $\forall x \tau(u, x)$ فرمولی باشد که مجموعه قضایای T را تعریف می‌کند که در آن $\tau(u, x)$ یک فرمول Σ_{n+1} است. با کمک لم قطری سازی فرمول φ طوری می‌سازیم که:

$$(۵.۴) \quad PA \vdash \varphi \leftrightarrow \exists x (\neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, x) \wedge \forall y \leq x \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, y)).$$

به سادگی ملاحظه می‌شود که φ گزاره‌ای Σ_2 است. ψ را برابر جمله

$$\exists x (\neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, x) \wedge \forall y < x \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, y))$$

قرار می‌دهیم. با توجه به Σ_2 بودن φ ، ψ هم Σ_2 خواهد بود. واضح است که $PA \vdash \neg \varphi \vee \neg \psi$. چون T نظریه‌ای سازگار است، حداقل یکی از دو گزاره φ یا ψ در T برقرار است. پس

$$\mathbb{N} \models \varphi \vee \psi \text{ در نتیجه } \mathbb{N} \models \exists x \neg \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, x) \vee \exists x \neg \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, x)$$

جهت رسیدن به تناقض فرض می‌کنیم که نظریه T, Π_{n+1} - تمام باشد. در نتیجه Σ_{n+2} - کامل نیز خواهد بود. دو حالت $\mathbb{N} \models \varphi$ و $\mathbb{N} \models \psi$ را جداگانه بررسی می‌کنیم. اگر $\mathbb{N} \models \varphi$ آنگاه $T \vdash \varphi$ (چون T, Σ_{n+2} - کامل است). از طرف دیگر داریم $\mathbb{N} \models \neg \forall x \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, x)$ (با توجه به تعریف φ). پس $T \not\vdash \varphi$ (چون فرمول $\forall x \tau(\ulcorner \varphi \urcorner, x)$ مجموعه قضیه‌های نظریه T را تعریف می‌کند) و این یک تناقض است. اگر $\mathbb{N} \models \psi$ آنگاه $T \vdash \psi$ (چون T, Σ_{n+2} - کامل است). در نتیجه $T \vdash \neg \varphi$. از طرف دیگر، با توجه به تعریف ψ داریم $\mathbb{N} \models \neg \forall x \tau(\ulcorner \neg \varphi \urcorner, x)$ و در نتیجه $T \not\vdash \neg \varphi$ که دوباره یک تناقض است. $\square$

قضیه بعد نشان می‌دهد که این نوع اثبات برای ناتمامیت نیز به طور اساسی غیر ساختاری است.

قضیه ۲.۸.۴. تابع محاسبه‌پذیر f وجود ندارد به طوری که برای هر نظریه U_ψ که سازگار بوده و مجموعه قضیه‌های آن Π_{n+2} - تعریف‌پذیر باشد، $f(\psi) \downarrow$ و برابر عدد گودل یک فرمول $\pi \in \Pi_{n+1}$ باشد که درست بوده ولی در نظریه U_ψ غیر قابل اثبات (در اینجا U_ψ نشان دهنده نظریه‌ای است که مجموعه قضیه‌های آن با فرمول ψ تعریف می‌شوند).

برهان. فرض کنیم چنین تابعی وجود داشته باشد. با کمک صورت پارامتری لم قطری سازی، فرمول $\theta(x)$ را طوری می‌سازیم که:

$$\begin{aligned} \text{PA} \vdash \theta(x) &\leftrightarrow \text{Pr}_{\text{PA}}(x) \vee (f(\ulcorner \theta \urcorner) \downarrow \wedge \text{Con}(\text{PA} + \Pi_{n+1}\text{-Th}(\mathbb{N}) + f(\ulcorner \theta \urcorner))) \\ &\wedge \text{Pr}_{\text{PA}+f(\ulcorner \theta \urcorner)}(x) \vee (f(\ulcorner \theta \urcorner) \downarrow \wedge \\ &\text{Con}(\text{PA} + \Pi_{n+1}\text{-Th}(\mathbb{N}) + \neg f(\ulcorner \theta \urcorner)) \wedge \text{Pr}_{\text{PA}+\neg f(\ulcorner \theta \urcorner)}(x)). \end{aligned}$$

به سادگی ملاحظه می‌شود که θ فرمولی Π_{n+2} است. اگر $f(\ulcorner \theta \urcorner) \uparrow$ آنگاه $\text{PA} = U_\theta$ بنابراین U_θ یک نظریه سازگار و Π_{n+2} - تعریف‌پذیر است. در نتیجه $f(\ulcorner \theta \urcorner) \downarrow$ (با توجه به فرضی که در مورد تابع f داریم) و این یک تناقض است. بنابراین $f(\ulcorner \theta \urcorner) \downarrow$ حداقل یکی از دو نظریه

$$\text{PA} + \Pi_{n+1}\text{-Th}(\mathbb{N}) + f(\ulcorner \theta \urcorner)$$

یا

$$PA + \Pi_{n+1}\text{-}Th(\mathbb{N}) + \neg f(\ulcorner \theta \urcorner)$$

سازگار است. اگر $PA + \Pi_{n+1}\text{-}Th(\mathbb{N}) + f(\ulcorner \theta \urcorner)$ سازگار باشد آنگاه $U_\theta = PA + f(\ulcorner \theta \urcorner)$ و این نظریه هم سازگار است (چون نظریه بزرگتر $PA + \Pi_{n+1}\text{-}Th(\mathbb{N}) + f(\ulcorner \theta \urcorner)$ را سازگار فرض کرده‌ایم). ولی با توجه به فرضی که در مورد تابع f داریم باید داشته باشیم $U_\theta \not\vdash f(\ulcorner \theta \urcorner)$. اما به وضوح $U_\theta \vdash f(\ulcorner \theta \urcorner)$ که یک تناقض را ایجاد می‌کند. در حالت دوم (یعنی اگر نظریه $PA + \Pi_{n+1}\text{-}Th(\mathbb{N}) + \neg f(\ulcorner \theta \urcorner)$ سازگار باشد) داریم $U_\theta = PA + \neg f(\ulcorner \theta \urcorner)$ و در نتیجه U_θ یک نظریه سازگار است. پس $f(\ulcorner \theta \urcorner)$ باید یک گزاره درست و Π_{n+1} باشد که از نظریه U_θ مستقل است. بنابراین $\Pi_{n+1}\text{-}Th(\mathbb{N}) \vdash f(\ulcorner \theta \urcorner)$ و در نتیجه $PA + \Pi_{n+1}\text{-}Th(\mathbb{N}) + \neg f(\ulcorner \theta \urcorner)$ ناسازگار است، که مجدداً یک تناقض می‌باشد. $\square$

تذکر ۳.۸.۴. در قضیه فوق، حتی اگر فرض کنیم که تابع f نسبت به اراکل 0^n محاسبه‌پذیر باشد باز هم حکم برقرار خواهد بود. زیرا به سادگی می‌توان ملاحظه کرد که در این صورت هر سه فرمول $\downarrow f(\ulcorner \theta \urcorner)$ و $Pr_{PA+f(\ulcorner \theta \urcorner)}(x)$ و $Pr_{PA+\neg f(\ulcorner \theta \urcorner)}(x)$ عضو Σ_{n+1} می‌شوند و در نتیجه $\theta(x)$ همچنان عضو Π_{n+2} باقی خواهد ماند. ادامه برهان به همان صورت قبل خواهد بود.

در [۱۴] ارتباط جالبی بین اصول انعکاس^۷ و قضیه دوم ناتمامیت برای نظریه‌های تعریف‌پذیر برقرار شده است که در ادامه شرح داده می‌شود.

تعریف ۴.۸.۴. برای هر نظریه T در زبان حساب، مجموعه «اصول انعکاس محلی»^۸، که با نماد $Rfn(T)$ نمایش داده می‌شود، برابر مجموعه همه جمله‌ها به صورت $\alpha \rightarrow Pr_T(\ulcorner \alpha \urcorner)$ می‌باشد. مجموعه «اصول انعکاس سراسری»^۹ نیز، که با نماد $RFN(T)$ نشان داده می‌شود، برابر مجموعه همه جمله‌ها به صورت $\forall x (Pr_T(\ulcorner \alpha(\bar{x}) \urcorner) \rightarrow \alpha(x))$ می‌باشد. اگر در این تعریف فرمول α را فقط

^۷reflection principles

^۸local reflection principles

^۹global reflection principles

از رده Σ_n در نظر بگیریم، مجموعه‌های حاصل را به ترتیب با نمادهای $Rfn_{\Sigma_n}(T)$ و $RFN_{\Sigma_n}(T)$ نشان می‌دهیم.

به سادگی ملاحظه می‌شود که $RFN_{\Sigma_0}(T)$ و Σ_0 -درستی T هر دو معادل سازگار بودن نظریه T هستند. بنابراین قضیه دوم ناتمامیت گودل را می‌توان به این صورت نیز بیان کرد:

قضیه ۵.۸.۴. برای هر نظریه T_ψ شامل PA ، T_ψ دارای خاصیت Σ_0 -درستی است، اگر و فقط اگر $T_\psi \not\vdash RFN_{\Sigma_0}(T_\psi)$.

این صورت از قضیه دوم ناتمامیت در [۱۴] به صورت زیر تعمیم داده شده است:

قضیه ۶.۸.۴. برای هر نظریه Σ_{n+1} - تعریف‌پذیر T_ψ شامل PA ، شرط‌های زیر معادل هستند:
الف. T_ψ دارای خاصیت Σ_n -درستی است.

ب. برای هر فرمول Σ_{n+1} مانند $\sigma(x)$ ، اگر $T_\sigma = T_\psi$ آنگاه $T_\sigma \not\vdash RFN_{\Sigma_n}(T_\sigma)$.

ج. برای هر فرمول Σ_{n+1} مانند $\sigma(x)$ ، اگر $T_\sigma = T_\psi$ آنگاه $T_\sigma \not\vdash RFN(T_\sigma)$.

۹.۴ جمع بندی نتایج

صورت معنایی قضیه اول ناتمامیت، یعنی:

$$PA \subseteq T \ \& \ Ax_T \in \Sigma_1 \ \& \ \mathbb{N} \models T \Rightarrow \Pi_1-Th(\mathbb{N}) \not\subseteq T$$

را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد (قضیه ۱.۴.۴):

$$PA \subseteq T \ \& \ Ax_T \in \Sigma_n \ \& \ \mathbb{N} \models T \Rightarrow \Pi_n-Th(\mathbb{N}) \not\subseteq T$$

یک صورت از قضیه گودل-راسر که به صورت:

$$PA \subseteq T \ \& \ Ax_T \in \Sigma_1 \ \& \ T \text{ is } 0\text{-consistent} \Rightarrow T \notin \Pi_1\text{-Deciding}$$

بیان می‌شود را به صورت زیر می‌توان تعمیم داد (قضیه ۸.۵.۴):

$$PA \subseteq T \ \& \ Ax_T \in \Sigma_{n+1} \ \& \ T \text{ is } n\text{-consistent} \Rightarrow T \notin \Pi_{n+1}\text{-Deciding}$$

و در قضیه ۱.۷.۴ ثابت شد که این نتیجه به طور اساسی غیر ساختی است، یعنی هیچ الگوریتمی برای محاسبه (یکی از) جمله‌های تصمیم ناپذیر وجود ندارد (برای $n \geq 3$).
چون ۱- سازگاری معادل Σ_1 -درستی است، قضیه اول ناتمامیت را می‌توان به این صورت زیر هم نوشت:

$$PA \subseteq T \ \& \ Ax_T \in \Sigma_1 \ \& \ T \text{ is } \Sigma_1\text{-sound} \Rightarrow T \notin \Pi_1\text{-Deciding}$$

که در قضیه ۵.۵.۴ به این صورت تعمیم داده شد:

$$PA \subseteq T \ \& \ Ax_T \in \Sigma_{n+1} \ \& \ T \text{ is } \Sigma_n\text{-sound} \Rightarrow T \notin \Pi_{n+1}\text{-Deciding}$$

اثبات قضیه اخیر، بر خلاف اثبات قضیه ۸.۵.۴، ساختاری بود و می‌توانستیم جمله تصمیم ناپذیر را به شیوه‌ای الگوریتمی محاسبه کنیم. قضیه‌های ۲.۶.۴ و ۳.۶.۴ بهینه بودن این تعمیم‌ها را ثابت کردند:

$$PA \subseteq T \ \& \ Ax_T \in \Sigma_{n+1} \ \& \ T \text{ is } \Sigma_{n-1}\text{-sound} \not\Rightarrow T \notin \text{Complete}$$

$$\text{PA} \subseteq T \ \& \ \text{Ax}_T \in \Sigma_{n+1} \ \& \ T \text{ is } (n-1)\text{-consistent} \not\Rightarrow T \notin \text{Complete}$$

و نتیجه ۳.۶.۴ به طور خاص نشان داد که صورت اولیه قضیه گودل-راسر حتی به نظریه‌های Π_1 -تعریف‌پذیر قابل تعمیم نیست:

$$\text{PA} \subseteq T \ \& \ \text{Ax}_T \in \Pi_1 \ \& \ T \text{ is consistent} \not\Rightarrow T \notin \text{Complete}$$

در حالتی که تعریف‌پذیری را برای مجموعه قضیه‌های نظریه در نظر بگیریم، بنابر قضیه ۱.۸.۴ داریم:

$$\text{PA} \subseteq T \ \& \ \text{theorems}(T) \in \Pi_{n+2} \ \& \ T \text{ is consistent} \Rightarrow T \notin \Pi_{n+1} - \text{Complete}$$

(منظور از $\text{theorems}(T)$ مجموعه قضیه‌های نظریه T است). بنابر قضیه ۲.۸.۴ این حالت از پدیده ناتمامیت هم به طور اساسی غیر ساختاری است.

مراجع

- [1] L. BEKLEMISHEV, GÖDEL THEOREMS AND LIMITS OF THEIR APPLICABILITY I, *Russian Mathematical Surveys* 65:5 (2010) 857–899.
- [2] G. Boolos, A new proof of the Gödel incompleteness theorem, *Notices of the American Mathematics Society* 36:4 (1989) 388–390.
- [3] W. Craig, On axiomatizability within a system, *Journal of Symbolic Logic* 18:1 (1953) 30–32.
- [4] K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter systeme I, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38 (1931) 173–198.
- [5] P. Hájek and P. Pudlák, *Metamathematics of First Order Arithmetic*, Springer–Verlag (1998).
- [6] P. Hájek, Experimental logics and Π_3^0 theories, *Journal of Symbolic Logic* 42:4 (1997) 515–522.
- [7] K. Ignatiev, On strong provability predicates and the associated modal logics, *Journal of Symbolic Logic* 58:1 (1993) 249–290.
- [8] D. Isaacson, Necessary and sufficient conditions for undecidability of the Gödel sentence and its truth, in: P. Clarck, D. DeVidi, M. Hallett (eds), *Vintage Enthusiasms: Essays in Honour of John Bell*, Springer (2011) 135–152.
- [9] K. Ishii, A note on the first incompleteness theorem, *Mathematical Logic Quarterly* 49:2 (2003) 214–216.

- [10] R. Jeroslow, Experimental logics and Δ_2^0 theories, *Journal of Philosophical Logic* 4:(1975) 253–267.
- [11] R. W. Kay, *Models of Peano Arithmetic*, Oxford University Press (1991).
- [12] M. Kåsa, Experimental logics, mechanism and knowable consistency, *Theoria* 78:1 (2012) 213–224.
- [13] M. Kikuchi, A note on Boolos’ proof of the incompleteness theorem, *Mathematical Logic Quarterly* 40:4 (1994) 528–532.
- [14] M. Kikuchi, T. Kurahashi, Generalizations of Gödel’s incompleteness theorem for Σ_n -definable theories of arithmetic, PREPRINT.
- [15] H. Kitada, An implication of Gödel’s incompleteness theorem, *Internatinal Journal of Pure and Applied Mathematics* 52:4 (2009) 511–567.
- [16] H. Kitada, Rebuttal to the review of my paper “An implication of Gödel’s incompleteness theorem”, *Internatinal Journal of Pure and Applied Mathematics* 70:1 (2011) 11–14.
- [17] M. Li and P. Vitány, *An Introduction to Kolmogorov Complexity and its Applications*, Springer-Verlag (2008) 3rd. ed.
- [18] B. J. Rosser, Extensions of some theorems of Gödel and Church, *Journal of Symbolic Logic* 1:3 (1937) 87–91.
- [19] K. Roy, The shortest definition of a number in Peano arithmetic, *Mathematica Logic Quarterly* 49:1 (2003) 83–86.

-
- [20] S. Salehi, Review of [15], *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* [zb1 1186.03072].
- [21] S. Salehi, Review of [16], *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* [zb1 1231.03053].
- [22] G. Serény, Boolos-style proofs of limitative theorems, *Mathematical Logic Quarterly* 50:2 (2004) 211–216.
- [23] C. Smoryński, The incompleteness theorems, in: J. Barwise (ed.) *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland Amsterdam (1977) 821–865.
- [24] R. Smullyan, *Gödel Incompleteness Theorems*, Oxford University Press (1992).
- [25] R. Soare, *Recursively Enumerable Sets and Degrees*, Springer-Verlag (1987).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

provability	اثبات‌پذیری
induction	استقرا
principle	اصل
recursive	بازگشتی
recursively enumerable	به طور بازگشتی شمارش پذیر
optimal	بهینه
Berry paradox	پارادکس بری
liar paradox	پارادکس دروغگو
Kolmogorov complexity	پیچیدگی کولموگوروف
primitive recursive function	تابع بازگشتی اولیه
partial recursive function	تابع بازگشتی جزئی
decidable	تصمیم پذیر
undecidable	تصمیم‌ناپذیر
definable	تعریف پذیر
undefinable	تعریف‌ناپذیری
generalization	تعمیم
contradiction	تناقض
Chaitin constant	ثابت شایتین

Peano arithmetic	حساب پئانو
Robinson's arithmetic	حساب رابینسون
self-reference	خود ارجاع
sound	درست
binary	دودویی
Rosserizing	راسری کردن
consistent	سازگار
consistency	سازگاری
constructive	ساختاری
arithmetical hierarchy	سلسله مراتب حسابی
enumeration	شمارش
Gödel number	عدد گودل
conjunction	عطف
bounded formula	فرمول کراندار
disjunction	فصل
Gödel incompleteness theorem	قضیه ناتمامیت گودل
complete	کامل
proposition	گزاره
diagonal lemma	لم قطری
Turing machine	ماشین تورینگ
universal Turing machine	ماشین تورینگ جهانی
computable	محاسبه پذیر
standard model of arithmetic	مدل استاندارد حساب
independent	مستقل
theory	نظریه

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

arithmetical hierarchy		سلسله مراتب حسابی
Berry paradox		پارادکس بری
binary		دودویی
bounded formula		فرمول کراندار
Chaitin constant		ثابت شایتین
complete		کامل
computable		محاسبه پذیر
conjunction		عطف
consistency		سازگاری
constructive		ساختاری
contradiction		تناقض
consistent		سازگار
decidable		تصمیم پذیر
definable		تعریف پذیر
diagonal lemma		لم قطری
disjunction		فصل
enumeration		شمارش
generalization		تعمیم

Gödel incompleteness theorem	قضیه ناتمامیت گودل
Gödel number	عدد گودل
independent	مستقل
induction	استقرا
Kolmogorov complexity	پیچیدگی کولموگوروف
liar paradox	پارادکس دروغگو
optimal	بهینه
partial recursive function	تابع بازگشتی جزئی
Peano arithmetic	حساب پئانو
primitive recursive function	تابع بازگشتی اولیه
principle	اصل
proposition	گزاره
provability	اثبات‌پذیری
recursive	بازگشتی
recursively enumerable	به طور بازگشتی شمارش پذیر
Robinson's arithmetic	حساب رابینسون
Rosserizing	راسری کردن
self-reference	خود ارجاع
standard model of arithmetic	مدل استاندارد حساب
sound	درست
theory	نظریه
Turing machine	ماشین تورینگ
undecidable	تصمیم‌ناپذیر
undefinable	تعریف‌ناپذیری
universal Turing machine	ماشین تورینگ جهانی

نمايه

ω -سازگار، ۱۲

n -سازگار، ۱۲

Σ_n -تعريف پذير، ۳۸

Σ_n -درست، ۳۸

Π_1 -تصميم گيرنده، ۴۰

0^n -محاسبه پذير، ۱۶

بازگشتي جزئي، ۶

بولوس، ۲۰

پارادکس

بري، ۲۰

دروغگو، ۱۹

پيچيدگي کولموگروف، ۲۰

تارسكي، ۱۲

ترتيب طول-الفبايي، ۳۱

جهش تورينگ، ۱۶

حساب

پٲانو، ۱۱

رابینسون، ۳

درجه تورینگ، ۱۵

درست، ۲۱

راسر، ۳۰

راسري ساري، ۳۰

زبان حساب، ۳

ساختاري، ۲۴

سازگاري مرتبه دو، ۳۴

سلسله مراتب حسابي، ۱۲

شاييتين، ۲۰

شمارش استاندارد ماشين‌هاي تورینگ، ۱۳

فرمول کراندار، ۱۲

قضيه اول ناتماميت، ۱۷

کريگ، ۴۷

کليني، ۱۴

لم

قطري، ۱۰

قطري پارامتري، ١١

ماشين تورينگ

جهاني، ١٤

اراكل دار، ١٥

مجموعه

شمارش پذير بازگشتي، ١٦

خلاق، ١٧

محمول اثبات پذيري، ١٢

هايک، ٣٩

يروسلف، ٣٩

SURNAME: Seraji

NAME: Payam

TITLE: Rosserizing and effecivizing some proofs of the first incompleteness theorem

SUPERVISOR: Saeed Salehi

ADVISOR: Jafar Sadegh Eivazloo

DEGREE: DOCTOR OF PHILOSOPHY

SUBJECT: Pure Mathematics

FIELD: Mathematical Logic

University of Tabriz

FACULTY OF MATHEMATICAL SCIENCES

DATE: 2016 NUMBER OF PAGES: 67

KEYWORDS: Gödel's incompleteness theorem, Rosserizing, Effecivizing, Kolmogorov complexity, Berry paradox.

ABSTRACT

In this thesis we investigate the Rosserizability and constructivity of some proofs of Gödel's first incompleteness theorem. By "Rosserizability" we mean that the proof goes through by assuming the (simple) consistency of the theory (rather than its e.g. ω -consistency). By "constructivity" the existence of an algorithm for constructing (one of) the independent sentence(s) is meant. We give a proof for the first incompleteness theorem which resembles Chaitin's and uses only the consistency assumption of the theory. But for Boolos' proof we show that the optimal condition for the independence of the sentence is consistency of the theory with its own consistency statement. Regarding the constructivity, we show that none of the proofs of Boolos or Chaitin can be constructive. In the last chapter, we present some generalizations of the first incompleteness theorem for definable theories.



University of Tabriz

Faculty of Mathematical Sciences

DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE
REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
(PH.D.) IN **PURE MATHEMATICS** (MATHEMATICAL LOGIC)

Rosserizing and effecivizing some proofs of the first incompleteness theorem

SUPERVISOR

Saeed Salehi

ADVISOR

Jafar Sadegh Eivazloo

BY

Payam Seraji

2016